UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CENTRE DE RECHERCHE SUR LES TRANSPORTS

MÉMOIRE D'ÉTUDIANT

CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE A, MONTRÉAL, QUÉBEC, H3C 3J7

CRT-592

PLANIFICATION DE TOURNÉES DE VÉHICULES

par

André Langevin

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures en vue de l'obtention du grade de Philosophiae Doctor (Ph.D.) en mathématiques appliquées, dirigée par François Soumis et Jacques Desrosiers.

Cette recherche a été rendue possible grâce à une subvention de la Société canadienne des postes, du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada et du F.C.A.R. du Gouvernement de Québec.

Cette étude a été publiée grâce à une subvention du fonds F.C.A.R. pour l'aide et le soutien à la recherche.

Université de Montréal

Centre de recherche sur les transports - Publication #592

Mai 1988

Dépôt légal - 3e trimestre 1988

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Cette thèse intitulée:

PLANIFICATION DE TOURNÉES DE VÉHICULES

présentée par: André Langevin

en vue de l'obtention du grade de: Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

Monsieur B. Smith, Ph.D., président

Monsieur M. Desrochers, Ph.D.

Monsieur G. Finke, Ph.D.

Monsieur F. Soumis, Ph.D.

À Gisèle, Stéphanie

et Jean-Michel

RÉSUMÉ

Cette thèse porte sur la planification de tournées de véhicules pour la cueillette et la livraison de colis sous des contraintes de fenêtres-horaire et de durée de tournée, et lorsque la capacité des véhicules n'est pas contraignante.

Nous analysons un système utilisant un centre de tri, ce qui permet de séparer la cueillette et la livraison. L'approche utilisée est de type "clustering first, routing second" et le problème est ainsi décomposé en deux parties: d'une part, la planification des zones i.e. le regroupement de points à visiter par un même véhicule et, d'autre part, la confection des itinéraires pour chacun des véhicules.

La contribution de cette thèse se situe principalement à deux niveaux: premièrement, nous avons mis au point une méthode analytique de découpage de zones pour le problème de tournées de véhicules avec contraintes de durée et, deuxièmement, nous avons proposé et analysé une formulation originale du problème du voyageur de commerce particulièrement bien adaptée à la modélisation de contraintes d'horaire.

Pour la planification des zones, nous présentons une méthode analytique de découpage d'une région en zones, chacune étant affectée à un seul véhicule. Le découpage tient compte de la durée maximale d'une tournée et vise à minimiser les coûts de transport. La méthode détermine les

dimensions optimales d'une zone en fonction de son éloignement du dépôt et de la densité de la demande dans cette zone. Nous étudions aussi l'impact de la variabilité journalière de la demande sur le design des zones et de la coopération entre les véhicules. Enfin, nous indiquons comment la méthode peut être intégrée à un système interactif d'aide à la décision.

Pour la confection des tournées de chacun des véhicules, nous proposons une nouvelle formulation du problème du voyageur de commerce bien adaptée à la modélisation des contraintes d'horaire. La relaxation linéaire de cette formulation contient, pour un problème comportant n points à visiter, 4n contraintes incluant les contraintes de fenêtres-horaire. Ceci permet d'utiliser cette formulation pour résoudre des problèmes de taille réaliste sur micro-ordinateur.

Les propriétés de cette formulation ont permis de mettre au point une méthode intéressante pour obtenir une borne au problème du voyageur de commerce sans résoudre la relaxation linéaire de la formulation. La qualité de cette borne permet donc l'utilisation efficace d'une méthode d'énumération et évaluation progressive (Branch & Bound) pour obtenir la solution optimale.

Une analyse et une classification des bornes obtenues par la relaxation linéaire d'un certain nombre de formulations du problème du voyageur de commerce sont présentées. Enfin, nous démontrons l'équivalence de certaines formulations au niveau de la qualité de la borne.

Mots-clés : transport, tournées de véhicules, affectation de zones, problème du voyageur de commerce, fenêtres-horaire.

ABSTRACT

This thesis addresses the problem of multiple-vehicle routing and scheduling for pick-up and delivery under time constraints and with no capacity constraints.

A system using a sorting center which allows the splitting of the pick-ups and the deliveries is analysed. We use a clustering first, routing second approach and the problem is thus decomposed in two: first, the design of zones i.e. the clustering of points to be visited by a single vehicle, and second the routing of each vehicle.

The main contribution of this thesis is two-fold: first, we present an analytical method of zoning for routing under duration constraints and second we propose and analyse a new formulation for the traveling salesman problem (T.S.P.) which is well suited to modelling time-window constraints.

For the design of zones, we use an analytical method to create clusters of points, each assigned to a single vehicle. The objective is to minimize transportation costs under duration constraints. This method determines the optimal size of the zones as a function of the demand density in the zone and the distance from the depot. We also examine the impact on the design of the daily variability of the demand and of the possible cooperation between vehicles.

For the routing of each vehicle, a new formulation for the T.S.P. is proposed. This formulation can easily handle time-window constraints. The linear relaxation of this formulation, for a problem having n points to be visited, contains 4n constraints including the time-window constraints. Characteristics of this formulation lead to a method to obtain a good bound for the T.S.P. without having to solve to optimality the linear relaxation.

An analysis and a classification of bounds obtained from the relaxation of many formulations of the T.S.P. are given. We also demonstrate the equivalence of certain formulations in terms of the quality of bounds.

Key words : transportation, vehicle routing, clustering, traveling salesman problem, time windows.

REMERCIEMENTS

J'aimerais en premier lieu exprimer toute ma gratitude à l'endroit de mes directeurs de recherche, François Soumis et Jacques Desrosiers. Ils ont su me faire partager leur passion de la recherche. Leur grande disponibilité en tout temps m'a permis de mener rapidement à terme mes travaux de recherche. Au cours de nos nombreuses discussions, ils ont su créer un climat de travail stimulant et intéressant. De plus, grâce à eux, j'ai pu m'initier aux présentations de communications dans les congrès internationaux, expérience extrêmement enrichissante, bien que parfois stressante! Je leur en suis très reconnaissant .

Je dois remercier mon épouse Gisèle qui m'a toujours solidement appuyé et encouragé tout au long de ce projet. Je lui dois l'environnement logistique et psychologique sans lequel ce doctorat n'aurait pas été possible.

Je veux remercier Brunilde Sanso, ma compagne de bureau au Centre de recherche sur les transports, pour son aide en maintes occasions. J'ai particulièrement apprécié son entrain et sa joie de vivre. Je remercie aussi Lucie Bibeau, Jean-Marc Heneman, Christian Lavoie et Michel Sauvé pour leur participation au niveau de l'informatique. J'ai discusté de plusieurs aspects de cette thèse avec Jean-Pierre Bélisle et je l'en remercie.

Je veux exprimer ma reconnaissance au personnel du secrétariat et du centre de documentation du C.R.T. pour m'avoir efficacement appuyé, toujours

avec gentillesse et empressement. Enfin, je remercie la Société canadienne des Postes, le gouvernement du Québec (Fonds F.C.A.C) et le C.R.S.N.G. pour leurs contributions financières à ces études.

Table des matières

page

Sommaire v

Abstract vii

Remerciements ix

Table des matières xi

Chapitre1: Introduction 1

1.1. Description du problème 1

1.2. Classification et complexité du problème 7

Chapitre 2- Revue de littérature 10

2.1. Modèle mathématique 10

2.2. Méthodes exactes pour le VRSP 17

2.3. Cueillette et livraison: cas statique 21

2.4. Cueillette et livraison: cas dynamique 27

Chapitre 3- Méthodologie de recherche 30

Chapitre 4- Analyse du marché de la livraison rapide dans la région de Montréal..... 34

4.1. Enquête auprès des entreprises privées de courrier..... 35

4.2. Le service de Poste Prioritaire..... 47

4.3. Conclusion..... 56

Chapitre 5- L'affectation de zones aux véhicules d'un service de messagerie..... 58

5.1. Introduction..... 59

5.2. Notions préliminaires..... 62

5.3. Le design des zones..... 66

5.4. Variabilité de la demande..... 88

5.5. Conclusion..... 94

Chapitre 6- Étude pratique d'un découpage de zones..... 96

6.1. Planification de zones pour la région métropolitaine de Montréal..... 97

6.2. Vers un système graphique d'aide à la planification des zones..... 101

Chapitre 7- Le problème du voyageur de commerce avec fenêtres-horaire..... 106

7.1. Formulations du problème du voyageur de commerce... 109

7.2. Une nouvelle formulation à deux flots pour le problème du voyageur de commerce..... 125

Chapitre 8: Conclusion..... 148

Bibliographie..... 152

Chapitre 1

INTRODUCTION

1.1. Description du problème.

Le problème de la confection de tournées de véhicules consiste à déterminer pour un ensemble de clients à visiter quels sous-ensembles de clients seront visités par chacun des véhicules et dans quel ordre chacun des clients sera visité de façon à minimiser la distance totale parcourue ou les coûts totaux de transport (fixes et/ou variables).

La longueur des tournées peut être limitée par la capacité des véhicules ou par une durée maximale. Lorsque les clients doivent être visités durant des intervalles de temps précis, on parle de contraintes d'horaire et les intervalles de temps sont appelés fenêtres-horaire. Si les clients sont connus d'avance, le problème de confection des itinéraires est dit "statique" alors que si l'on est obligé de modifier les itinéraires au fur et à mesure de la réception des appels téléphoniques des clients, le problème est dit "dynamique".

Les problèmes de confection d'itinéraires sont des problèmes difficiles à résoudre en raison de leur caractère hautement combinatoire: le nombre de solutions possibles augmente de façon exponentielle en fonction du nombre de points à visiter.

La présente étude porte sur le problème de la confection de tournées de véhicules pour la cueillette et la livraison de petits colis sous des contraintes de fenêtres-horaire et dans un contexte partiellement dynamique i.e. lorsqu'une petite partie de la demande n'est pas connue à l'avance. Ce problème nous a été proposé par la Société canadienne des Postes dans le cadre d'une collaboration entre celle-ci et le Centre de Recherche sur les Transports de l'Université de Montréal.

La Société canadienne des Postes offre dans les grands centres urbains un service, appelé Poste Prioritaire, de cueillette la journée de l'appel avec livraison le lendemain. Nous allons décrire le fonctionnement de ce service pour la région de Montréal. Pour la cueillette, un répartiteur répartit manuellement environ 250 appels entre quarante véhicules dont les routes sont déjà établies pour environ 250 points fixes (clients réguliers) et communique par radio avec les chauffeurs les modifications à leur itinéraire. C'est donc sur lui que repose la difficile opération de redistribution de la demande lorsqu'un véhicule tombe en panne ou lorsque l'horaire n'est pas respecté (à cause des conditions climatiques par exemple).

La livraison est effectuée le lendemain, après tri durant la nuit, par les facteurs. Ce service, en opération depuis 5 ans, a connu une forte croissance annuelle et s'approche du point de saturation du système manuel d'affectation des nouvelles demandes aux véhicules. La perspective d'améliorer le service (offrir la livraison le même jour ou augmenter le volume de la demande) ne

peut donc être envisagée sans l'automatisation de la procédure de confection et modification des tournées.

L'intérêt de la présente recherche est double: économique et théorique. Sur le plan économique, la présente étude porte sur la mise au point de techniques qui ouvrent la voie à de nouveaux services et donc à de nouveaux marchés dont le potentiel semble particulièrement prometteur. D'autre part, sur le plan théorique, bien que de nombreux travaux aient été menés ces cinq dernières années sur les problèmes de tournées avec points de demande fixes, comme nous le verrons dans la revue de littérature, peu de recherches ont été effectuées jusqu'à présent sur les problèmes de *routing* avec fenêtres-horaire.

Ce projet s'inscrit dans un ensemble de projets d'optimisation en transport postal intra-urbain, décrits par P.-E. Landry[1986], et amorcés en 1981 au Centre de Recherche sur les Transports de l'Université de Montréal en collaboration avec la Société canadienne des Postes. Une des réalisation de ces recherches est un logiciel nommé Transpost qui traite le problème de la génération des parcours dans le cas de demande fixe. Ce logiciel permet la localisation des arrêts sur le réseau routier urbain de la région de Montréal et calcule les tables des distances nécessaires à la génération des parcours. Cependant ce logiciel s'est avéré insatisfaisant pour traiter les problèmes de tournées avec contraintes d'horaire.

Dans la mise sur pied d'un système de transport sur appel ("demand responsive transit"), la confection des itinéraires s'inscrit dans un ensemble de tâches à considérer qui peut être divisé en trois groupes:

A. Le traitement des demandes de service qui comprend les tâches suivantes:

- réception des demandes de service et des annulations
- contrôle de la disponibilité des véhicules
- mise-à-jour des banques de données sur la disponibilité des véhicules, les listes de demandes à satisfaire, les routes déjà établies, etc.
- affectation à un véhicule et confection des tournées et des horaires

B. L'opération des véhicules qui comprend les activités suivantes:

- communications avec les véhicules
- intervention du répartiteur pour les modifications aux tournées
- intervention des chauffeurs dans les décisions sur les itinéraires
- déroulement des tournées

C. Le support au système qui comprend:

- planification de l'organisation
- planification et contrôle du système d'information
- gestion du flot d'information et tenue de livre
- fonctions administratives
- transition ordinateur-homme en cas de panne
- transition du système manuel au système informatisé (en début

d'opération)

Cette classification est semblable à celle proposée par Haines et Wolff[1982].

L'objectif de la présente étude se concentre principalement 1. sur l'affectation de zones de cueillette aux véhicules et 2. sur l'élaboration d'algorithmes de confection de parcours qui tiennent compte des contraintes d'horaire.

Plusieurs modes de fonctionnement d'un service de cueillette et livraison sont envisageables:

- service porte-à-porte: un même véhicule effectue la cueillette et la livraison sans qu'il y ait de tri entre les deux opérations;
- échange entre véhicules: un colis pourrait être ramassé par un véhicule et transmis à un autre pour livraison;
- spécialisation des véhicules par zones géographiques: pour éviter un trop grand déplacement des véhicules, on peut limiter le déplacement des véhicules à une zone précise, certains véhicules assurant le transport interzone;
- centre de tri: le problème est alors décomposé en deux, un problème de cueillette suivi d'un problème de livraison après le traitement du courrier dans un centre de tri;
- mini-centres de tri ou d'échange: des centres d'échange placés à la frontière de deux zones pourraient faciliter l'échange entre les véhicules;

Pour une description détaillée de ces modes, le lecteur pourra se référer à l'article de Haines et Wolff[1982].

Il existe une forte interaction entre l'analyse d'un mode de fonctionnement et la confection des itinéraires: en effet, l'analyse des différentes formes d'organisation peut se faire par l'étude de différents scénarios. Or un scénario ne peut être analysé et évalué qu'en construisant des itinéraires et horaires pour en mesurer les performances. Aussi nous concentrerons-nous dans les sections qui suivent sur les problèmes de confection de tournées.

Idéalement, un système de confection de tournées devrait être suffisamment souple et interactif pour qu'un répartiteur puisse facilement intervenir pour modifier au besoin les parcours, composante essentielle compte tenu de la grande variation des temps de parcours due entre autres aux conditions climatiques, aux bouchons de circulation imprévisibles et aux heures de pointe.

1.2. Classification et complexité du problème de routing et scheduling.

Les problèmes de confection de tournées et d'horaires ont été classifiés par Bodin *et al.* [1983] en trois grandes catégories: les problèmes de confection de tournées de véhicules, notés VRP (Vehicle Routing Problem), les problèmes de confection d'horaires de véhicules, notés VSP (Vehicle Scheduling Problem) et les problèmes de confection de tournées et d'horaires de véhicules, notés VRSP (Vehicle Routing and Scheduling Problem).

Le VRP consiste à trouver un ensemble de tournées permettant à un ou plusieurs véhicules de satisfaire un ensemble de demandes (visite d'un seul point par demande) tout en respectant un certain nombre de contraintes dont les plus fréquentes sont la capacité des véhicules et la durée des tournées. L'objectif est habituellement de minimiser les coûts de transports. Aucune dimension temporelle autre que la durée des tournées n'est considérée.

La seconde classe (VSP) englobe les problèmes de VRP pour lesquels les tournées sont soumises à des contraintes d'horaires fixes: les données d'un problème de scheduling sont en général un ensemble de tâches avec pour chacune, un temps précis de début et de fin, un lieu de début et un lieu de fin. Certains de ces problèmes, dans le cas d'un dépôt unique, sont des problèmes de flot dans un réseau alors que lorsqu'il y a plusieurs dépôts, les problèmes sont NP-difficiles.

Enfin, la dernière classe regroupe les problèmes qui sont à la fois des problèmes de routing et de scheduling. Certains de ces problèmes ont des contraintes de fenêtres de temps sur les points à visiter. Dans le cas de cueillette et livraison, chaque demande consiste en la visite de deux lieux par un même véhicule. Le problème envisagé dans cette étude fait partie de cette troisième classe. Il est à noter que le problème de VRP peut être considéré comme un problème de VRSP où les fenêtres de temps sont toutes égales à la durée totale de planification et qu'ainsi les méthodes développées pour le VRSP peuvent dans certains cas être utilisées pour résoudre un problème de VRP.

Pour une couverture complète du sujet, on se référera à l'article de Bodin *et al.* [1983] qui couvre de façon presque exhaustive (les auteurs passent en revue près de 700 articles) l'ensemble des méthodes heuristiques relatives aux problèmes de tournées et horaires et à celui, plus récent, de Laporte et Nobert[1987] qui présente une synthèse des méthodes exactes.

Les problèmes de routing ont reçu l'attention de nombreux chercheurs durant les trois dernières décennies et cet intérêt vient de la difficulté intrinsèque de ces problèmes, en plus bien sûr de son importance économique. Lenstra et Rinnooy Kan[1981] classifient la grande majorité de ces problèmes comme NP-difficiles. Certains problèmes de VSP pour lesquels il n'y a qu'un dépôt et qu'un type de véhicules sont des problèmes de flot dans un réseau. Tous les autres sont NP-difficiles.

De nombreuses voies de recherche ont été ouvertes mais plusieurs demeurent encore inexplorées. On pourra consulter, pour un survol des perspectives de recherche dans le domaine du routing et scheduling, l'article de Magnanti[1981] et ceux, plus récents, de M.S. Daskin[1985] et de Golden et Baker[1985].

Chapitre 2

REVUE DE LITTÉRATURE

La revue de littérature est divisée en quatre parties. Dans la première partie, on énonce, sous deux formes, le modèle mathématique qui est à la base d'un très grand nombre d'approches optimales pour les problèmes de routing et scheduling. La deuxième partie couvre quelques articles pertinents concernant des développements récents dans les méthodes exactes de solution du VRSP, puis la troisième partie passe en revue des articles sur le problème plus spécifique de cueillette et livraison de plusieurs origines à plusieurs destinations lorsque la demande est toute connue à l'avance. Enfin, la quatrième partie rend compte d'articles traitant du cas dynamique i.e. la demande non toute connue à l'avance. On retrouvera de plus au début du chapitre 4 une brève revue de littérature sur les méthodes analytiques appliquées aux problèmes de tournées et enfin, au chapitre 6, une revue plus spécifique au problème du voyageur de commerce avec et sans contraintes d'horaire.

2.1. Modèle mathématique.

Le problème de confection de tournées et d'horaires d'une flotte de véhicules pour la cueillette et la livraison consiste à satisfaire l'ensemble des demandes de transport en minimisant la distance totale parcourue par les véhicules. Chaque demande comprend un lieu d'origine et un lieu de

destination, un nombre de personnes ou de colis à transporter, un intervalle de temps pour la cueillette et un pour la livraison et un durée de cueillette et de livraison. Il y a un ou plusieurs dépôts avec des temps de départ et d'arrivée des véhicules qui définissent des périodes de travail.

Les contraintes habituellement considérées sont les suivantes:

1. Visites: chaque origine et chaque destination est visitée une seule fois.

2. Fenêtres de temps à chaque point.

3. Capacité des véhicules.

4. Dépôts: chaque véhicule retourne au dépôt d'où il est parti.

5. Couplage: pour un client donné, un même véhicule doit visiter le point d'origine et le point de destination.

6. Priorité: le point d'origine d'un client doit être visité avant son point de destination.

7. Disponibilité des pièces de travail (correspondant aux horaires des chauffeurs).

2.1.1 Modèle de flots de réseau.

Le modèle mathématique repose sur une structure de réseau dont les noeuds représentent les points de cueillette, de livraison et les dépôts, et les arcs correspondent aux plus courts chemins entre les noeuds.

Nous définissons les ensembles suivants:

N^+: ensemble des noeuds d'origine

N^-: ensemble des noeuds de destination

D: ensemble des noeuds des dépôts

$N = N^+ \cup N^-$ et $P = N \cup D$

K: ensemble des véhicules

Pour chacune des n demandes, nous avons:

- un noeud d'origine $i \in N^+$
- un intervalle de temps pour visiter i: $[a_i, b_i]$
- une durée de cueillette M_i
- un noeud de destination $n+i \in N^-$
- un intervalle de temps pour visiter n+i: $[a_{n+i}, b_{n+i}]$
- une durée de livraison M_{n+i}

A chaque arc (i,j) correspond une durée t_{ij} et un coût (distance) c_{ij}. Un arc (i,j) du réseau n'est défini que si l'horaire le permet i.e. si $a_i + t_{ij} \leq b_j$. À chaque véhicule (ou pièce de travail) k correspond un dépôt d^k.

Deux types de variables sont utilisés:

- des variables de flot x^k_{ij} binaires qui valent 1 si le véhicule k utilise l'arc (i,j) et 0 sinon,
- des variables temporelles t_i continues associées aux temps d'arrivée aux noeuds.

Le problème se formule alors comme suit (Solomon et Desrosiers 1988):

$$\text{Min } z = \sum_{k\in K} \sum_{i\in P} \sum_{j\in P} c^k_{ij} x^k_{ij} \qquad (1)$$

sous les contraintes

$$\sum_{k\in K} \sum_{i\in P} x^k_{ij} = 1 \qquad j\in N^+ \qquad (2)$$

$$\sum_{i\in P} x^k_{ij} = \sum_{i\in P} x^k_{ji} \qquad j\in N,\ k\in K \qquad (3)$$

$$\sum_{j\in N} x^k_{d^k,j} = \sum_{i\in N} x^k_{i,d^k} \qquad k\in K \qquad (4)$$

$$\sum_{j\in N} x^k_{d^k,j} \le 1 \qquad k\in K \qquad (5)$$

$$\sum_{i\in P} x^k_{ij} = \sum_{i\in P} x^k_{i,n+j} \qquad j\in N^+,\ k\in K \qquad (6)$$

x^k_{ij} binaire $\qquad i,j\in P,\ k\in K \qquad (7)$

$$a_i \le t_i \le b_i \qquad i\in N \qquad (8)$$

$$x^k_{ij} > 0 \Rightarrow t_i + t_{ij} + M_i \le t_j \qquad i,j\in N \qquad (9)$$

$$x^k_{d^k,j} > 0 \Rightarrow a_k + t_{d^k,j} \le t_j \qquad j\in N^+,\ k\in K \qquad (10)$$

$$x^k_{i,d^k} > 0 \Rightarrow t_i + t_{i,d^k} + M_i \le b_k \qquad i\in N^-,\ k\in K \qquad (11)$$

$$t_i < t_{n+i} \qquad i\in N^+ \qquad (12)$$

L'objectif consiste alors à minimiser la distance totale parcourue. Pour tenir compte du coût fixe d'un véhicule k, il suffit d'ajouter ce coût aux coûts des arcs (d^k,j) pour tout j.

Les contraintes (2) et (3) assurent que chaque noeud est visité une et une seule fois et que c'est le même véhicule qui entre et qui sort d'un noeud. Les contraintes (4) et (5) sont les contraintes de dépôt. La contrainte (6) assure le couplage i.e. que le même véhicule visite le noeud d'origine et le noeud de

destination d'une demande. Les contraintes (8) à (12) décrivent les exigences de compatibilité entre les itinéraires et les horaires. Il est à noter que les contraintes (9), (10) et (11) ne sont pas linéaires.

La fonction objective et les contraintes (2) à (7) définissent un problème de flot à coût minimum sur un réseau.

Ce problème est un problème de voyageurs de commerce multiples auquel on a ajouté des contraintes d'horaire, de priorité et de couplage.

Nous n'avons pas inclus de contraintes de capacité des véhicules à cause de la nature du courrier transporté: lettres ou petits colis. Cependant, on pourrait facilement les ajouter au modèle en définissant des variables indiquant la quantité de courrier à bord d'un véhicule à chaque sommet.

2.1.2 Modèle de partitionnement d'ensemble.

On peut reformuler le problème en termes de variables binaires sur les tournées réalisables du réseau. Le problème est alors formulé comme un problème de partitionnement avec des contraintes de disponibilité des véhicules. La formulation suivante est de Desrosiers, Dumas et Soumis [1986b]:

$$\text{Min } z = \sum_{k \in K} \sum_{r \in \Omega k} C^k_r Y^k_r$$

sous les contraintes

$$\sum_{k \in K} \sum_{r \in \Omega k} \partial^k_{ri} Y^k_r = 1 \qquad i \in N$$

$$\sum_{r \in \Omega k} Y^k_r \leq 1 \qquad k \in K$$

$$Y^k_r \text{ binaires} \qquad r \in \Omega_k,\ k \in K$$

où

Ω_k: ensemble des tournées satisfaisant les contraintes d'horaire pour le véhicule k;

Y^k_r: variable binaire valant 1 si la tournée r du véhicule k est utilisée, 0 sinon;

C^k_r: coût de la tournée r du véhicule k(somme des coûts de ses arcs);

∂^k_{ri}: constante binaire valant 1 si la tournée r du véhicule k passe par le noeud i, 0 sinon.

L'énumération de toutes les tournées réalisables étant impossible, le problème est alors résolu par génération de colonnes (décomposition de Dantzig-Wolfe). Les colonnes sont générées en solutionnant des problèmes de plus courts chemins avec contraintes d'horaire, de priorité et de couplage. Cette méthode est décrite plus en détail dans la section suivante.

La relaxation linéaire de ce problème, restreinte à un sous-ensemble de variables, est appelée problème-maître. Le sous-problème, qui est un problème de plus court chemin avec contraintes de fenêtres de temps, utilise les variables duales s_i et π_k du problème-maître et s'écrit comme suit (pour un k fixe):

$$\text{Min } z = \sum_{i \in P} \sum_{j \in P} C^k_{ij} x^k_{ij}$$

sous les contraintes

$$\sum_{i \in P} x^k_{ij} = 1 \qquad j = d_k$$

$$\sum_{i \in P} x^k_{ij} - \sum_{i \in P} x^k_{ji} = 0 \qquad j \in P$$

$$\sum_{i \in P} x^k_{ij} = \sum_{i \in P} x^k_{i,n+j} \qquad j \in N^+$$

$$x^k_{ij} \text{ binaire} \qquad i,j \in P$$

$$a_i \le t_i \le b_i \qquad i \in P$$

$$x^k_{ij} > 0 \Rightarrow t_i + t_{ij} + M_i \le t_j \qquad i,j \in N$$

$$x^k_{d^k,j} > 0 \Rightarrow a_k + t_{d^k,j} \le t_j \qquad j \in N^+$$

$$x^k_{i,d^k} > 0 \Rightarrow t_i + t_{i,d^k} + M_i \le b_k \qquad i \in N^-$$

$$t_i < t_{n+i} \qquad i \in N^+$$

où

$$C^k_{ij} = \begin{cases} c^k_{ij} - \pi_k & i = d^k \\ c^k_{ij} - \sigma_i & i \in P \end{cases}$$

2.2. Méthodes exactes pour le VRSP.

On retrouve trois approches de résolution optimale des problèmes de tournées avec contraintes de fenêtres de temps: les méthodes de programmation en nombres entiers (relaxation linéaire et "branch and bound") sont efficaces pour les problèmes faiblement contraints i.e. pour lesquels les fenêtres de temps sont larges; lorsque les problèmes sont fortement contraints, les approches par génération de colonnes ont été appliquées avec succès; enfin, l'approche de programmation dynamique pour générer des bornes pour la procédure de séparation et évaluation progressive permet d'aborder plusieurs types de problèmes. Pour chacune de ces approches, nous présentons un article récent.

Laporte, Nobert et Desrochers[1985] présentent un algorithme exact de programmation linéaire en nombres entiers pour un problème de tournées comportant des contraintes de capacité et de distance. Le problème est résolu par simplexe en relaxant les contraintes d'intégralité et d'élimination de sous-tours et en les générant au fur et à mesure que l'on découvre qu'elles sont violées. Une technique de séparation et évaluation progressive (branch and bound) est utilisée pour obtenir l'intégralité. Les auteurs utilisent des coupes de Gomory au premier noeud de l'arbre de recherche pour augmenter la borne inférieure initiale et pour accélérer l'obtention d'une solution entière. Des solutions exactes sont obtenues pour des problèmes comportant jusqu'à 60 noeuds. Cette méthode peut être utilisée pour résoudre le VRSP lorsque les fenêtres de temps sont peu contraignantes. Cependant, l'inconvénient de

cette méthode est qu'on n'obtient une solution réalisable qu'à la toute fin. On ne peut donc développer d'heuristique basée sur cette méthode.

Christofides, Mingozzi et Toth[1981] proposent une méthode de relaxation des états (i.e. une réduction du nombre d'états) associés à une récursion de programmation dynamique. Ils obtiennent ainsi une borne inférieure utilisée dans une procédure de séparation et évaluation progressive. Cette méthode est analogue à la relaxation lagrangienne en programmation en nombres entiers. Elle peut donner de bons résultats lorsque la relaxation des états est pertinente au problème considéré.

Desrosiers, Soumis et Desrochers[1984] présentent une méthode de solution du problème de routing avec fenêtres de temps par génération de colonnes. Dans le contexte du transport scolaire, des problèmes comportant jusqu'à 151 noeuds sont résolus optimalement. La formulation utilisée est celle d'un problème de partionnement d'ensemble dont on résoud la relaxation linéaire. On obtient une solution entière par Branch & Bound. Dans le problème de partionnement, à chaque tournée satisfaisant les contraintes d'horaires correspond une variable binaire (valant 1 si la tournée est utilisée, 0 sinon). Le très grand nombre de variables ($O(2^n)$ dans le pire cas) force l'utilisation d'une technique de génération de colonnes: le problème-restreint est résolu par simplexe et le sous-problème permettant de générer une nouvelle colonne de coût marginal minimum est un problème de plus court chemin avec contraintes d'horaires. Le sous-problème est résolu par programmation dynamique en utilisant une adaptation de l'algorithme de

Ford-Bellman dans lequel on conserve à chaque noeud une liste d'étiquettes correspondant aux meilleures routes possibles compte tenu à la fois du coût et du temps d'arrivée aux noeuds. On trouvera dans Desrosiers, Pelletier et Soumis[1983] une description détaillée de cet algorithme, d'une structure appropriée de données et d'une stratégie efficace de gestion des listes d'étiquettes.

La probabilité d'obtenir une solution optimale entière au problème-maître est forte (plus de 80% des cas) et est favorisée par l'ajout de coupes sur le nombre de véhicules et sur les coûts de transports. Enfin, lorsque la solution n'est pas encore entière, on utilise une procédure de séparation et évaluation progressive (Branch & Bound) avec énumération implicite à chaque noeud de l'arbre. Les tests ont démontré qu'en utilisant un problème de plus court chemin avec contraintes d'horaires, l'intégralité de la solution du problème restreint n'est pas assurée, mais on obtient une excellente borne qui ne se détériore pas lorsque le nombre de noeuds ou la longueur des fenêtres de temps augmente.

L'avantage de cette méthode est qu'avec le problème du plus court chemin avec contraintes d'horaires on obtient une solution entière satisfaisant une partie des contraintes additionnelles en plus de celles du réseau. Il est alors plus facile d'obtenir une solution entière pour le problème global alors que par les approches de décomposition qui séparent les contraintes additionnelles du problème de réseau, il est difficile à partir des solutions

entières du réseau de construire des solutions entières satisfaisant en plus les contraintes additionnelles.

Il est à noter que le problème du plus court chemin avec contraintes d'horaires (PCCCH) est NP-complet et est donc en principe aussi difficile à résoudre que le problème original. Cependant, dans la résolution par programmation dynamique, la prise en considération de l'ensemble des fenêtres de temps peut mener à une élimination d'un très grand nombre d'états ce qui rend la méthode praticable pour des problèmes d'assez grande taille. Desrochers et Soumis[1988a] ont par la suite proposé pour résoudre le PCCCH, un algorithme efficace fonctionnant en temps pseudo-polynomial et qui permet de résoudre des problèmes comportant jusqu'à 2500 noeuds. Ils définissent un ordre lexicographique de traitement des étiquettes qui permet une généralisation de l'algorithme de Dijkstra.

Dans un second article, Desrochers et Soumis[1988b] proposent une méthode primale-duale de réoptimisation fonctionnant aussi en temps pseudo-polynomial et qui permet de réduire le coût de la résolution répétée du PCCCH, processus nécessaire dans la méthode de génération de colonnes, en réutilisant une partie de la solution précédente. Un intérêt indéniable de la méthode de programmation dynamique développée dans cet article, est qu'elle ouvre la voie à la mise au point d'algorithmes pour des problèmes de programmation dynamique à plusieurs dimensions. M. Desrochers[1986] a exploité cette idée pour développer un algorithme pour le problème de plus

court chemin respectant de multiples contraintes dont des fenêtres de temps à chaque noeud.

2.3. Cueillette et livraison: cas statique.

Le problème de confection de tournées d'une flotte de véhicules pour la cueillette et la livraison est un problème de routing auquel on ajoute des contraintes de fenêtres-horaire, de couplage et de priorité. Ce problème est constitué de trois composantes:

1. l'affectation d'un client à un véhicule (clustering): il s'agit de choisir le véhicule le plus approprié auquel on va affecter le client;
2. la confection de l'itinéraire (routing): on détermine l'ordre de visite d'un certain nombre de clients par un véhicule;
3. la confection de l'horaire (scheduling): on détermine le moment précis de visite de chacun des clients.

Ces trois composantes sont interdépendantes et, si l'on veut résoudre le problème optimalement, il faut traiter les trois composantes simultanément. Mais ce problème est extrêmement difficile à résoudre et il n'existe pas de méthodes optimales pour des problèmes de plusieurs centaines de noeuds. La plupart des méthodes développées sont heuristiques, bien que des méthodes exactes aient été proposées pour résoudre une partie du problème i.e. pour une ou des composantes. A notre connaissance, seul l'algorithme de Dumas[1985] permet de résoudre simultanément les deux premières

composantes de façon optimale, et ceci uniquement pour des problèmes de petite taille (une centaine de noeuds).

Dans ce qui suit, nous présentons d'abord les méthodes entièrement heuristiques, puis nous passons en revue un certain nombre d'articles présentant des méthodes qui sont exactes pour au moins une des composantes et finalement la méthode de Dumas[1985].

Bodin *et al.*[1983] décrivent dans leur article de synthèse trois méthodes heuristiques. Une première méthode, appelée "NEIGUT/NBS", utilise une procédure d'insertion séquentielle par laquelle on construit la route d'un seul véhicule à la fois en déterminant les meilleures clients à y affecter. Lorsqu'on ne peut ajouter d'autres clients à une route, celle-ci est "gelée" et le processus est répété avec les clients non encore affectés. Ainsi les routes sont générées en séquence et les premières sont généralement meilleures.

La deuxième méthode [Jaw *et al.* 1986] du MIT utilise une approche de construction en parallèle de toutes les routes ("concurrent procedure"). Un algorithme de recherche d'arbre minimal (spanning tree) assure la formation de mini-regroupements par véhicule, de l'ensemble des clients d'une période donnée (tranche de 20 à 30 minutes).

La troisième méthode décrite par Bodin *et al.* est celle de Bodin et Sexton[1986]. Ceux-ci proposent une procédure de regroupement et insertion simultanée. Certains clients, susceptibles de voyager ensemble (par la

proximité de leurs origine, destination et période de voyagement), sont regroupés en sous-ensembles qui servent de base à la formation des routes. Les autres clients sont affectés aux différentes routes par un algorithme de transport. Enfin un algorithme 1-opt est utilisé pour permuter les clients entre les routes.

Roy *et al.*[1985a] ont développé une technique heuristique combinant à la fois l'insertion en parallèle et le regroupement. Cette méthode considère les trois composantes du problème en même temps. L'algorithme construit l'ensemble des routes simultanément à partir du début de la journée en utilisant des mesures de proximité pour insérer des groupes de demandes. L'objectif visé est d'optimiser la productivité des véhicules dans une première étape, puis la qualité du service tout en conservant le niveau de productivité atteint à l'étape précédente. L'algorithme peut aussi insérer de nouvelles demandes dans les routes déjà établies. Cet algorithme a été utilisé dans le cadre du transport des personnes handicapées et a été testé sur les données des services de transport en commun des villes de Montréal, Toronto et Sherbrooke [Roy,1985b].

Nous décrivons maintenant les méthodes heuristiques comportant une approche optimale pour une partie du problème. Sexton et Bodin[1985a] proposent une méthode de solution du problème de routing et scheduling, pour un véhicule, basée sur la méthode de décomposition de Benders. Cette décomposition permet de dissocier les composantes "scheduling" et "routing" qui sont résolues séparément. Le problème de scheduling, présenté comme le

dual d'un problème de flot à coût maximal, est résolu de façon exacte par un algorithme non-itératif. Puis, plutôt que de résoudre de façon exacte la composante routing, les auteurs proposent une heuristique qui permet d'améliorer l'itinéraire en utilisant le problème-maître de la décomposition de Benders.

Cette méthode est utilisée dans une heuristique globale pour le problème de cueillette et livraison par une flotte de véhicules dans lequel l'ensemble des clients est d'abord divisé en regroupements correspondant à chacun des véhicules. Les auteurs ont résolu des problèmes impliquant jusqu'à 20 clients par véhicules.

Desrosiers, Dumas et Soumis[1986b] proposent une méthode, pour le problème à plusieurs véhicules, qui traite une partie de l'affectation aux véhicules conjointement avec la confection des itinéraires et des horaires pour tous les véhicules. La méthode développée permet de résoudre des problèmes comportant jusqu'à 200 clients et est appliquée au transport des personnes handicapées dans la région de Montréal. Le problème est résolu en 2 phases: une heuristique forme des mini-regroupements (mini-clusters) de clients voyageant ensemble dans un même véhicule puis un algorithme exact est appliqué pour distribuer les mini-regroupements entre les tournées:

1. A partir d'une solution réalisable, on utilise un algorithme de programmation dynamique pour optimiser chacune des routes. Ces routes sont divisées en mini-regroupements.

2. Un programme linéaire en nombres entiers solutionné de façon optimale par génération de colonnes est utilisé pour réaffecter les mini-regroupements entre les véhicules. Une fois les routes établies, les mini-regroupements sont éclatés et chaque route est réoptimisée.

Dans un autre article, Desrosiers, Dumas et Soumis[1986a] présentent une méthode exacte de programmation dynamique "forward" pour minimiser la distance totale parcourue dans le cas d'un seul véhicule. Il s'agit du même problème que celui traité par Sexton et Bodin[1985b] i.e le sous-problème formé des composantes routing et scheduling. Des problèmes de 40 demandes ont été facilement résolus par cet algorithme qui est utilisé dans l'optimisation de tournées produites par une heuristique pour le problème à plusieurs véhicules. Le nombre d'états et les temps de calcul augmentant linéairement avec le nombre de demande, des problèmes de plus grande taille pourraient être résolus.

Armstrong et Garfinkel[1982] et Psaraftis[1983] ont aussi développé des algorithmes de programmation dynamique pour le problème de confection d'itinéraires et d'horaire pour un seul véhicule. Mais les performances de ces algorithmes sont inférieures à celles de l'algorithme de Desrosiers, Dumas et Soumis[1986a].

Y. Dumas[1985] présente la seule méthode optimale, à notre connaissance, de résolution des parties routing et clustering du problème global. Il utilise une approche de recouvrement des demandes avec les routes

réalisables; ce dernier problème est résolu par génération de colonnes où chacune des routes réalisables est générée par un problème de plus court chemin avec contraintes additionnelles résolu par programmation dynamique. Cette méthode est efficace lorsque les contraintes sont très restrictives i.e. lorsqu'il y a peu de demandes par véhicule.

2.4. Cueillette et livraison: cas dynamique.

Dans le cas dynamique, au moment de la réception d'une nouvelle demande de transport, un certain nombre de demandes ont déjà été satisfaites et ne sont plus considérées dans le problème. Le reste des demandes a été affecté aux différents véhicules et l'ensemble des tournées est connue. Le problème consiste alors à affecter la nouvelle demande à un véhicule et à modifier la tournée de celui-ci. Comme les affectations sont effectuées en temps réel, les algorithmes sont heuristiques et très rapides.

Il faut noter que les recherches effectuées à ce jour l'ont été dans le cadre du transport des personnes et non de colis comme dans la présente étude. Aussi l'objectif de minimiser l'inconvénient des usagers (temps de parcours et temps d'attente avant d'être ramassé) présent dans toutes ces recherches ne s'applique pas à notre problème où le temps de transport n'a aucune importance pour le client en autant que les échéances soient respectées.

Outre les travaux de Roy et al.[1985a] dont nous avons déjà parlé, peu de travaux ont à ce jour été réalisés. Bodin *et al.* [1983] rapportent qu'à leur connaissance les seules recherches entreprises dans ce domaine l'ont été par Wilson, Psaraftis, Odoni et leurs collègues du MIT et présentent trois approches.

La première approche, méthode d'insertion développée par Wilson et Miller[1977], consiste à choisir la meilleure façon d'insérer un nouveau passager dans les tournées existantes en examinant toutes les combinaisons possibles d'insertion du ramassage et du dépôt. Cet examen est effectué par une procédure de "branch and bound" sur un arbre à trois niveaux correspondant respectivement au choix du véhicule, au choix du point d'insertion du ramassage du client et au choix du point d'insertion de son dépôt.

La fonction objective que l'on cherche à minimiser tient compte de la qualité du service offert (temps à bord, différence entre le temps promis et le temps réel de ramassage, différence entre le temps demandé et le temps réel de dépôt) et de l'équité dans la longueur de chacune des routes.

Le système possède une procédure de réaffectation des demandes qui réexamine l'état du système à toutes les 20 minutes et réaffecte toutes les demandes des véhicules en retard de plus de 15 minutes. Cette procédure nous semble particulièrement intéressante dans le contexte où la vitesse des véhicules est très variable, ce qui est une des caractéristiques du système que nous analyserons.

De plus, les auteurs explorent une alternative qui consiste à accumuler un certain nombre de demandes avant de procéder à l'affectation en espérant qu'avec plus d'information, une meilleure affectation soit possible.

Une autre approche, développée par Psaraftis[1980], considère l'affectation dynamique à un véhicule unique i.e. une fois le choix du véhicule effectué. Le problème est résolu par programmation dynamique et les contraintes de fenêtres de temps sont remplacées par des contraintes de déplacement maximal par rapport à l'ordre de réception des appels ("maximum position shift") pour éviter qu'un client soit indéfiniment reporté. Bodin *et al.*[1983] notent que l'algorithme est lent lorsqu'il y a plus de 8 ou 9 clients mais ajoutent que la vitesse de calcul n'est pas véritablement un problème dans un environnement dynamique puisqu'à tout moment, le nombre de clients à être desservis par un véhicule donné est toujours petit.

La dernière approche présentée par Bodin *et al.*[1983] traite d'un cas particulier du problème dynamique où l'on insiste sur la qualité du service, ce qui s'applique davantage au transport de personnes qu'à celui du courrier et est donc moins pertinent à notre étude.

Enfin, Solomon et Desrosiers[1988] et Desrochers et al.[1988] ont présenté des articles de synthèse sur les problèmes de tournées avec fenêtres-horaire.

Chapitre 3

MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE

L'analyse du service offert par la Société des Postes a permis de distinguer trois catégories de services selon les lieux d'origine et de destination des demandes de transport: 1. cueillette et livraison à l'intérieur de la région de Montréal; 2. cueillette dans la région de Montréal et livraison à l'extérieur (i.e. à l'aéroport) et 3. cueillette à l'extérieur (i.e. en provenance de l'aéroport) et livraison dans la région de Montréal. Pour le courrier de Montréal vers Montréal, on voulait étudier la possibilité d'offrir un service de livraison le jour même de la cueillette.

De plus, la confection des tournées s'effectue dans un contexte partiellement dynamique puisqu'une petite partie de la demande provient d'appels de la clientèle au cours de la journée, ce qui nécessite la modification des tournées "en temps réel". Enfin, la présence d'intervalles de temps pour chaque cueillette ne fait qu'ajouter à la complexité du problème. Pour la majorité des clients, la cueillette doit s'effectuer avant la fermeture, généralement à 17 heures. Cependant, un petit nombre de clients exigent la cueillette dans un intervalle de temps plus restreint.

Nous avons voulu, dans un premier temps, approfondir notre connaissance du marché de la livraison rapide. C'est pourquoi nous avons procédé à une enquête auprès des compagnies de messagerie pour identifier

les caractéristiques d'un tel service. Nous avons aussi, bien entendu, étudié le fonctionnement du service de Poste Prioritaire. Les résultats de ces enquêtes sont présentés au chapitre 3.

À la suite de ces enquêtes, il est clairement apparu que la Société des Postes ne pourrait concurrencer les compagnies privées pour le marché de la livraison "même jour" en raison de la rémunération de ses chauffeurs basée sur un taux horaire en comparaison de la rémunération à la pièce des chauffeurs des entreprises privées.

Aussi nous nous sommes tournés vers l'étude d'un service de livraison le lendemain, service qui permet l'utilisation d'un centre de tri. Le problème de confection des tournées est alors réduit à un problème de cueillette, la livraison étant assurée par les facteurs le lendemain. Le fait que tous les colis vont passer par le centre de tri va permettre d'augmenter la productivité des véhicules puisque tous les points de cueillette dans un secteur peuvent être visités par le même véhicule. Et, lorsque le nombre de points est suffisamment grand dans une zone, on peut y affecter de façon permanente un véhicule.

Une telle organisation permet de séparer le problème en un problème de création de zones suivi d'un problème de confection d'itinéraires dans chacune des zones. Cette approche est appelée dans la littérature "clustering first, routing second"; elle est d'autant justifiée que le nombre de demandes est élevé; cette approche consiste, en effet, à séparer un problème de grande taille en plusieurs problèmes de moindre taille. D'autre part, il est certainement

souhaitable, du point de vue de l'efficacité, que chaque chauffeur connaisse bien son territoire.

Nous avons laissé tomber la dimension dynamique du problème pour deux raisons: premièrement à cause du petit pourcentage de demandes sur appel, et deuxièmement parce que l'on peut découper l'horizon (fuyant) de planification en tranches de temps de telle sorte que toute la demande d'une tranche soit connue au moment de la confection des itinéraires pour cette tranche.

Le problème posé est alors le suivant:

1- Mettre au point une méthode permettant de séparer une région en zones, chaque zone étant affectée à un seul véhicule.

2- Résoudre un problème de tournée d'un seul véhicule, la tournée satisfaisant les contraintes de fenêtres-horaire.

Pour la première partie, nous avons opté pour une approche de planification stratégique basée sur une méthode analytique et sur les probabilités géométriques. L'objectif était de déterminer des zones de livraison qui ne varient pas au jour le jour (et plutôt laisser les changements opérationnels au répartiteur). L'avantage d'une telle approche est qu'elle ne nécessite pas de moyens informatiques sophistiqués et peu de données. D'autre part, la planification est alors basée sur un comportement moyen et dépend moins des données d'une journée spécifique, ce qui aurait pour effet de modifier constamment les zones affectées à chaque chauffeur. La méthode

de décomposition en zones que nous avons mise au point est décrite au chapitre 4.

Pour résoudre de façon optimale les problèmes de tournées de véhicules avec des contraintes de fenêtres-horaire, il existe deux grandes familles de méthodes: lorsque les problèmes sont peu contraints (fenêtres très larges), les méthodes de programmation en nombres entiers (relaxation des contraintes d'horaires et "branch and bound") se sont avérées efficaces; pour les problèmes fortement contraints (fenêtres étroites), les méthodes utilisant la programmation dynamique ont donné de bons résultats. Aucun résultat n'a, jusqu'à présent, été présenté pour des problèmes combinant les deux types de contraintes. Or, le problème envisagé dans cette étude est à la fois très contraint pour un certain nombre de demandes et peu contraint pour les autres. L'objectif de nos recherches était donc de trouver une formulation du problème qui puisse tenir compte des contraintes de fenêtres-horaire et qui fournisse une bonne borne de façon à pouvoir utiliser une méthode exacte de résolution. La formulation devait permettre de traiter des problèmes de tournées sur une trentaine de points à visiter. Ces travaux sur le problème de tournée avec fenêtres-horaire nous ont amenés à examiner de façon détaillée la qualité des bornes de plusieurs formulations du problème du voyageur de commerce. On en trouvera les détails au chapitre 7.

Chapitre 4

ANALYSE DU MARCHÉ DE LA LIVRAISON PAR COURRIER DANS LA RÉGION DE MONTRÉAL

Le marché de la livraison par courrier a connu un essort remarquable en Amérique du Nord durant les cinq dernières années. Au Canada seulement, le marché est évalué à environ 500 millions de dollars par année et la quantité d'objets transportés par les compagnies privées a augmenté de 15% annuellement durant ces cinq dernières années. Dans la région de Montréal, le nombre d'entreprises a doublé durant la même période.

Nous avons mené une enquête auprès des transporteurs privés de la région de Montréal et sur le service de Poste Prioritaire de la Société canadienne des Postes afin de mieux connaître le marché et les besoins du milieu en termes de système d'aide à la planification des flottes de véhicules, de procédure de répartition des demandes aux véhicules et de confection des itinéraires et horaires. Cette étude a été menée en 1986 et les chiffres indiqués dans ce chapitre sont ceux de 1986.

La première section traite des informations recueillies auprès des transporteurs privés alors que dans la section 2, nous décrivons l'organisation à la Société canadienne des Postes. Nous terminons le chapitre en discutant d'un certain nombre d'aspects concernant l'organisation d'une flotte et la répartition des appels.

4.1. Enquête auprès des entreprises privées de courrier.

Nous avons mené une enquête auprès de compagnies offrant le service de courrier (cueillette et livraison de lettres et colis) dans la région de Montréal afin d'en connaître le marché. Des 93 compagnies recensées dans le bottin des Pages Jaunes à l'été 86, nous en avons contacté 61 par téléphone. Parmi ceux-ci, 42 ont accepté de répondre au moins en partie à nos questions qui portaient principalement sur les types de service offert, la composition de la flotte, le volume de la demande et la tarification.

4.1.1 Les types de service.

Les services offerts par l'ensemble des compagnies peuvent être regroupés en 3 catégories suivant le temps de livraison:

1) service urgent,
2) service même jour,
3) service du lendemain.

Le service urgent consiste à effectuer la cueillette et la livraison moins d'une heure après l'appel du client. Lorsque la livraison est effectuée la journée de l'appel du client, on parle de service "même jour" et si elle est effectuée le lendemain, on parle de service "du lendemain". La plupart des compagnies qui offrent un service de livraison le même jour livrent tous leurs

colis à destination de Montréal la même journée à moins que l'appel n'arrive après l'heure limite (généralement 16 heures). La Société des Postes offre, avec son service de Poste Prioritaire, la livraison le lendemain.

Nous avons pu constater une certaine spécialisation des compagnies au niveau du type de clientèle desservie. Par exemple, une compagnie transporte surtout du courrier de professionnels (avocats, notaires, comptables) alors qu'une autre se spécialise dans la livraison de colis assez volumineux aux magasins de détail. Une autre ne fait que la liaison Montréal-Mirabel et ainsi de suite.

4.1.2 La composition des flottes.

Afin de stratifier notre échantillon, et à défaut d'informations précises sur les compagnies, nous avons classifié celles-ci selon la taille de leur annonce dans les Pages Jaunes et nous avons observé une certaine relation entre la taille de l'annonce et la taille de la flotte. Ainsi, les 13 compagnies dont l'annonce est composée d'une seule ligne ont des flottes de 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 15, 20, 60 véhicules respectivement (nous n'avons pas inclus la flotte de 100 véhicules d'un transporteur spécialisé dans l'envoi de gros colis à l'extérieur de la région de Montréal); les 8 compagnies qui ont une petite annonce (moins de 1/16 de page) ont des flottes de 8, 11, 15, 20, 25, 40, 40, 45 véhicules; les 11 compagnies ayant une annonce de taille moyenne (1/16 de page) ont des flottes de 9, 12, 15, 25, 30, 40, 45, 50, 60, 75, 150 véhicules; et finalement les 9 compagnies avec grande annonce (1/8 de page et plus):

10, 20, 30, 35, 40, 60, 60, 100, 100 véhicules. Les moyennes respectives pour chacune des catégories d'annonce sont: 11,1 25,5 46,5 et 50,6 véhicules. Le tableau suivant indique la distribution des compagnies selon la taille de l'annonce et le type de réponse obtenue:

nombre de compagnies de courrier

taille de l'annonce:	1 ligne	petite	moyenne	grande	total
accepté de répondre	13	5	8	7	33
accepté(extérieur[1])	1	3	3	2	9
refusé de répondre	10	3	3	3	19
pas contacté	28	4	0	0	32
total	52	15	14	12	93

Les 42 compagnies qui ont répondu à notre enquête ont une flotte globale de 1338 véhicules. Compte tenu que nous avons sondé la presque totalité des grandes entreprises, nous sommes en mesure d'estimer à plus de 1600 véhicules la flotte globale affectée au transport de petits colis dans la région de Montréal (ceci devrait être considéré comme une borne inférieure). Ce nombre ne tient compte que des véhicules des compagnies offrant le service de courrier sur appel. Il est à noter que des 42 compagnies qui ont

[1] compagnies n'effectuant la livraison qu'à l'extérieur de la région de Montréal (comme les compagnies aériennes par exemple).

Ce nombre ne tient compte que des véhicules des compagnies offrant le service de courrier sur appel. Il est à noter que des 42 compagnies qui ont répondu à notre enquête, les 4 compagnies avec les plus grandes flottes possèdent 34% des véhicules alors que les 8 compagnies avec les plus grandes flottes possèdent 53% des véhicules. Un petit nombre de compagnies utilisent des livreurs à bicyclette ou à pied au centre-ville. Le responsable d'une de ces entreprises estimait à 250 le nombre de livreurs à bicyclette oeuvrant dans le centre-ville de Montréal durant l'été 1986. Le salaire hebdomadaire de ces employés qui travaillent à commission oscille entre 200 $ et 250 $. Il est à noter que ce service à bicyclette fonctionne même durant l'hiver!

distribution de la taille des flottes

nombre de véhicules:	1 à 15	16 à 30	31 à 45	46 à 60	plus de 60
pourcentage de cies:	43%	17%	17%	12%	12%

4.1.3 La demande et la tarification.

Le nombre de demandes par véhicule par jour varie entre 10 et 25 selon la compagnie, avec un nombre moyen de 15 demandes par véhicule. Ainsi on peut estimer que le volume global de demandes par jour pour la région de Montréal est de l'ordre de 24 000 demandes(15 x 1600). Et si l'on considère 260 jours ouvrables par année, on trouve un marché de l'ordre de 6 millions de demandes annuellement.

Les auteurs d'une étude sur le transport par courrier publiée en 1978 par Transport Canada ont évalué, en collaboration avec une compagnie de transport, les frais moyens d'utilisation d'un petit véhicule (type fourgonnette[1]) à 13,50 $ l'heure, soit un coût journalier de 108 $ (salaire du chauffeur et frais partagés d'administration compris). Huit ans plus tard, on peut certainement évaluer ce coût de façon très conservatrice à 160 $ par jour (en supposant une augmentation annuelle de 5%). D'où l'on peut déduire que les frais globaux annuels pour l'ensemble de la flotte sont de l'ordre de 70 millions de dollars. On peut donc raisonnablement conclure que le chiffre d'affaire global est supérieur à ce montant.

Une caractéristique que nous avons retrouvé chez un grand nombre de compagnies est l'existence d'une période creuse (juillet et août) et, dans une moindre mesure, une période de pointe (à la fin de l'automne). Le rapport du volume de la période de pointe sur le volume de la période creuse varie de 1,5 à 2.

Sur le plan de la tarification, nous avons observé une très grande variation du prix d'un envoi. Comme plusieurs compagnies étaient réticentes à nous donner des informations sur leur système de tarification, nous avons dû téléphoner à leur répartiteur pour obtenir le coût d'un envoi avec origine et destination précises. Pour un trajet de 6 km dans le centre de Montréal, le prix

---

[1] L'éventail de types de véhicules utilisés allant de la voiture sous-compacte jusqu'au grand camion, nous avons choisi la fourgonnette comme véhicule-type.

demandé pour une livraison le même jour variait de 4$ à 9$ alors que le coût d'un envoi de Montréal vers la banlieue (15 km) variait de 6$ à 15$. Pour un service express (une heure), le prix demandé était approximativement le double du prix du service "même jour". Il faut ajouter que certains transporteurs ont un tarif fixe quelle que soit la distance alors que d'autres ont un tarif qui dépend de cette distance; dans ce cas, le coût au kilomètre varie entre 50¢ et 75¢ et s'ajoute à un prix de base variant de 2,50$ à 4,00$.

4.1.4 Les systèmes de répartition des demandes et confection des itinéraires.

Nous avons pu constater que l'informatisation du système de répartition des demandes aux véhicules et de confection des itinéraires est à peu près inexistante. Les gens qui ont expérimenté des logiciels commerciaux adressent les reproches suivants aux logiciels disponibles: difficulté et souvent impossibilité d'insérer une nouvelle demande dans les programmes de confection d'itinéraires, effet de ralentissement de la prise des données (appels), et coût prohibitif. Plusieurs compagnies ont cependant manifesté un intérêt certain pour un système informatique adapté, si la progression manifeste du marché ces dernières années se poursuit.

4.1.5 Données d'un service "même jour".

Afin de mieux cerner les caractéristiques de la demande de transport de type courrier rapide, nous avons recueilli auprès d'une compagnie de courrier "même jour" qui effectue la cueillette et la livraison les données d'une journée typique, soit l'heure de l'appel, l'origine et la destination de chacune des 344 demandes de cette journée. Nous présentons des résultats sur la distribution des distances entre le point de cueillette et le point de livraison des demandes, sur la répartition géographique de la demande et sur la répartition des appels durant la journée.

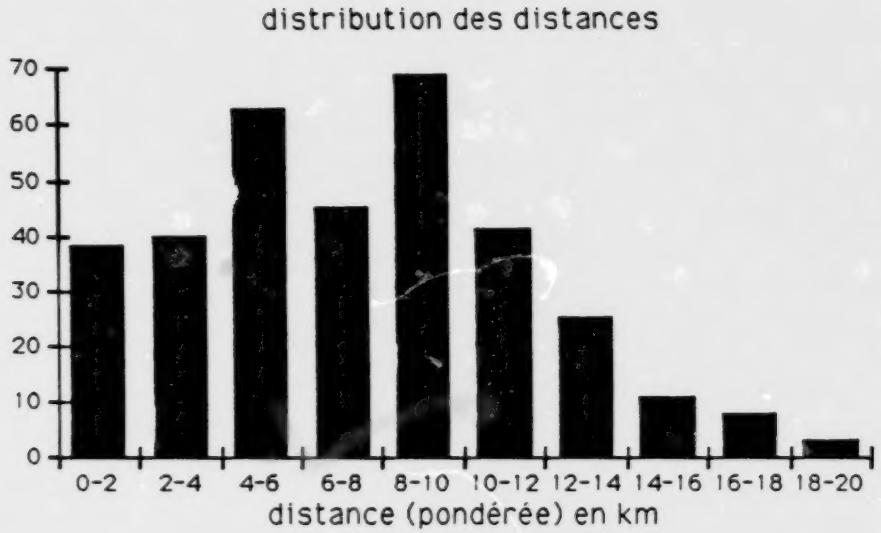
Pour obtenir la distribution des distances, nous avons calculé pour chacune des demandes la longueur du chemin le plus court sur le réseau routier codifié[1] sur lequel chaque noeud correspond à une intersection et chaque arc à un segment de rue entre deux intersections. De plus, pour prendre en considération l'effet de ralentissement dû à la congestion, la longueur des arcs a été pondérée suivant la situation de l'arc: un poids de 1,67 pour les arcs situés au centre-ville, un poids de 1 pour les arcs situés dans la zone relativement dense entourant le centre-ville et un poids de 0,67pour les arcs situés à l'extérieur de cette dernière. Grâce à ce système, le programme de calcul des plus courts chemins privilégie l'utilisation des autoroutes et des voies rapides même si la longueur réelle est plus longue, ce qui simule bien le comportement naturel d'allonger le trajet si ça diminue le

[1]les réseaux routiers codifiés des principales villes du Canada sont disponibles auprès de Statistiques-Canada sous le nom de "Area Master Files".

temps de parcours. Le principe sous-jacent à ces modifications de la longueur des arcs est que dans un système de confection d'itinéraires et d'horaires, avec contraintes sur le temps de cueillette et livraison, la durée de parcours est plus importante que la distance parcourue. Ce système permet l'utilisation d'une vitesse unique, bonne pour toute les sections, ce qui entraîne une relation directe entre la longueur des arcs et le temps de parcours.

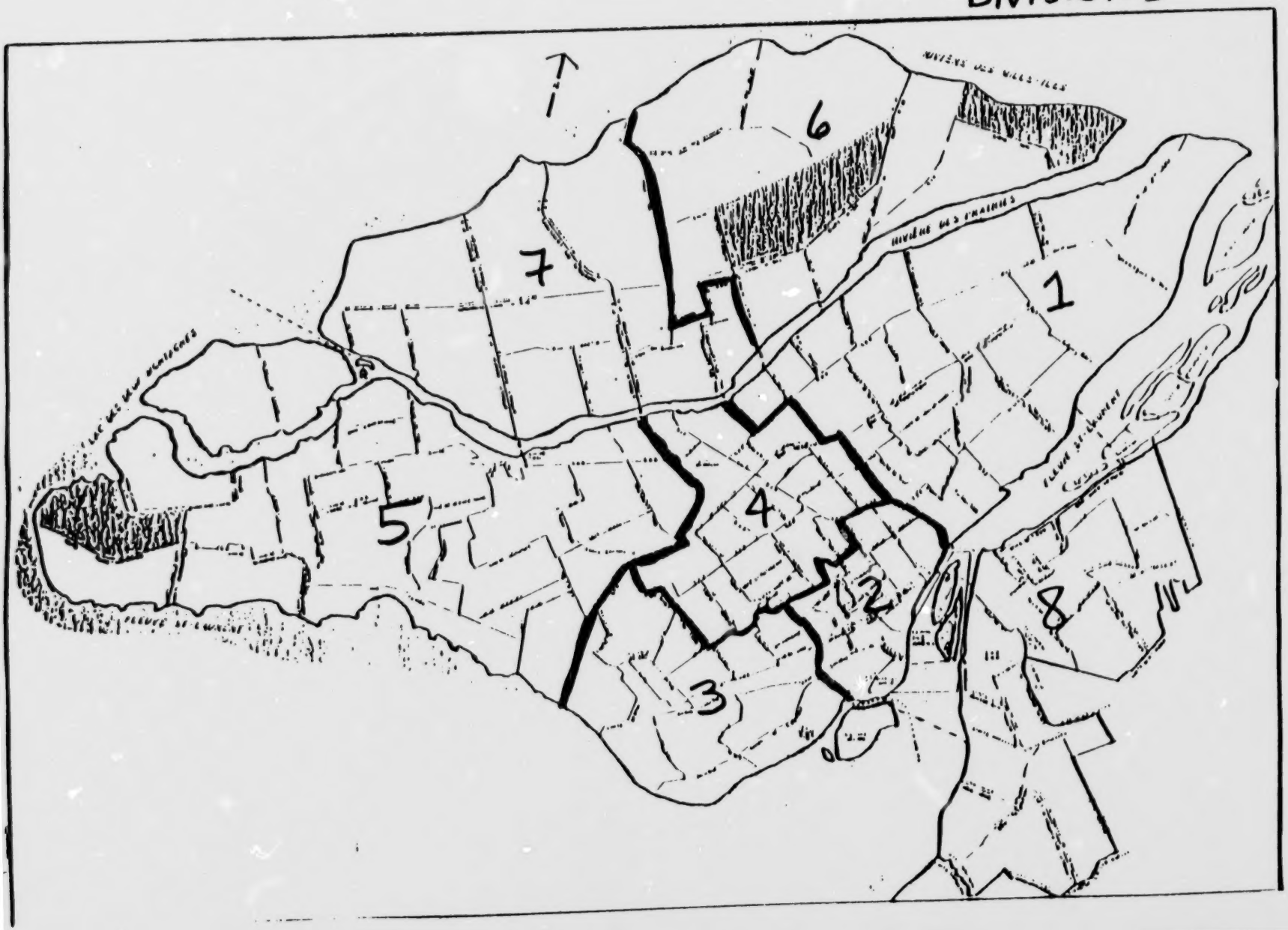
Le programme de calcul des plus courts chemins tient compte des sens uniques et des interdictions de virage à gauche. En fait, la région a été divisée en carrés de 1 km2 et une table des distances entre les centroïdes des carrés a été construite. La distance entre deux points donnés est remplaçée par la distance entre leur centroïde respectif. Lorsque deux points tombent dans le même carré (10 cas sur 344), nous utilisons la distance manhattan. La distance (pondérée) moyenne des trajets est de 7,5 km.

Pour l'échantillon des 344 demandes de transport de colis, la distribution des distances origine-destination est la suivante:

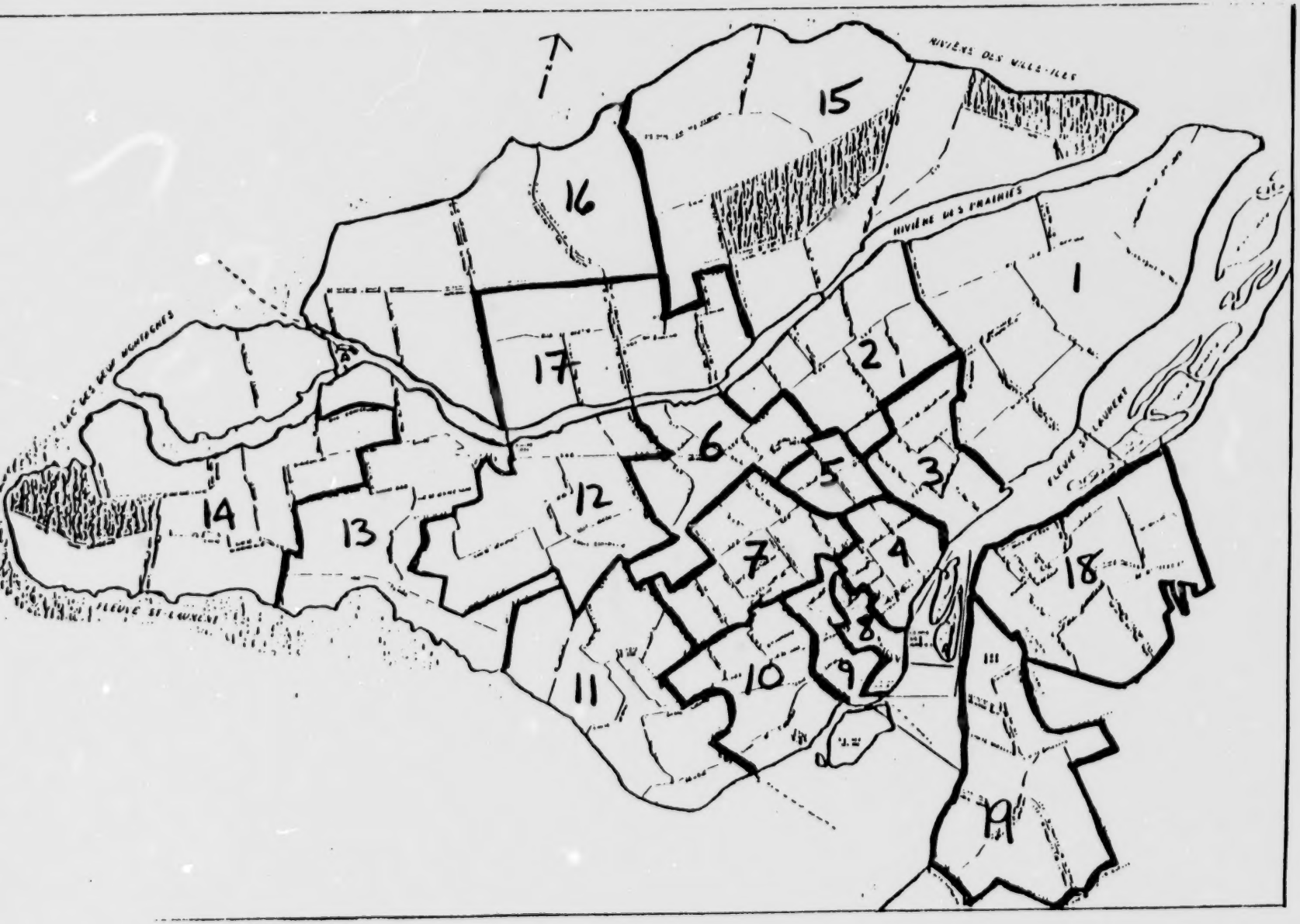


Pour étudier la répartition géographique de la demande, nous avons divisé la région couverte (l'île de Montréal, Laval et une partie de la Rive-Sud) en 19 sections. La société des Postes utilise un découpage du territoire en zones appelées "régions de tri d'acheminement" (RTA) et qui correspondent aux trois premiers caractères du code postal. Nous avons formé nos sections en regroupant pour chacune un certain nombre de RTA. Nous avons ensuite regroupé les sections en 8 divisions. Les sections et divisions choisies correspondent chacun à un territoire plus ou moins circulaire et nous avons essayé de respecter les subdivisions naturelles et logiques de la région. Les deux cartes des pages suivantes illustrent les sections et divisions utilisées.

DIVISIONS



SECTIONS

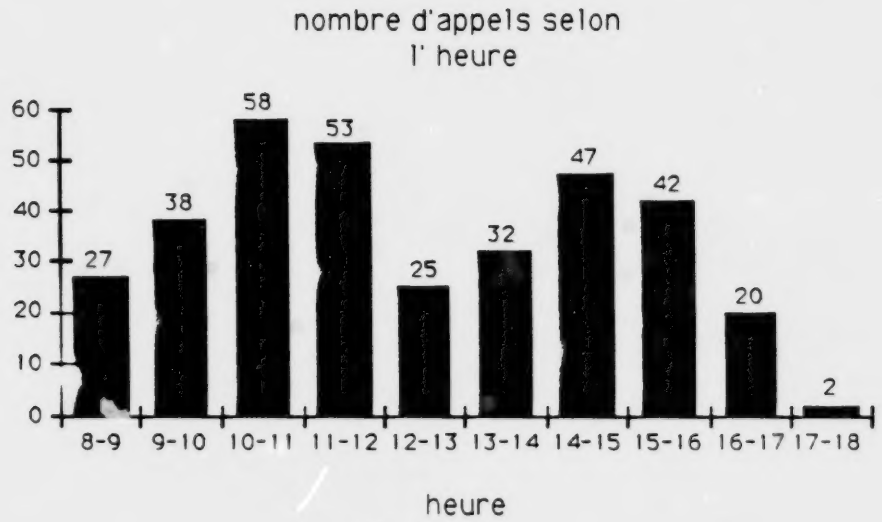

RIVIÈRE DES MILLE-ÎLES
RIVIÈRE DES PRAIRIES
FLEUVE ST-LAURENT
LAC DES DEUX MONTAGNES
FLEUVE ST-LAURENT
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19

La répartition de la demande est donnée au tableau suivant:

	destinations(divisions)						
origine	1	2	3	4	5	ext.	total
1(est)	0	2	0	4	1	2	9
2(centre-sud)	6	68	12	45	6	16	153
3(sud-ouest)	5	16	3	9	4	5	42
4(centre-nord)	7	33	15	24	12	18	109
5(ouest)	3	13	2	4	1	5	28
ext.	0	1	0	1	0	0	2
total	21	133	32	87	24	46	343

On retrouve autour de 70% des origines et destinations dans les divisions 2 et 4 (partie centrale de l'île de Montréal).

La répartition des appels durant la journée est assez dispersée avec les périodes les plus occupées de 10 hres à 12 hres et de 14 hres à 16 hres:



4.2. Le service de Poste Prioritaire.

4.2.1. Description du service.

La Société canadienne des Postes offre dans les grands centres urbains un service de cueillette de colis avec livraison le lendemain (le client peut aussi aller porter son colis dans une succursale, ce qui est plus économique). Nous avons étudié l'organisation de ce service pour la région de Montréal.

Une soixantaine de véhicules sont affectés à cette tâche: livraison le matin des colis dans les succursales, d'où ils sont ensuite livrés à domicile par

les facteurs, et cueillette chez les clients l'après-midi. Tous les colis sont acheminés au centre de tri de l'aéroport de Dorval en fin de journée, triés durant la nuit et redistribués aux succursales le lendemain matin par les camions.

Les itinéraires des véhicules sont préétablis pour les clients programmés (qui ont un contrat de cueillette régulière) puis les demandes téléphoniques sont ajoutées à ces itinéraires, au fur et à mesure de leur réception, par un répartiteur en liaison-radio avec les chauffeurs. Chaque chauffeur est affecté à une ou plusieurs zones postales (RTA) pour lesquelles il peut recevoir des demandes supplémentaires. Par le code postal du client, le répartiteur sait à quels chauffeurs il peut attribuer la demande. Ainsi la zone de cueillette couverte par chaque chauffeur est relativement peu étendue et il doit déposer tout son chargement en un seul point (au centre de tri) à la fin de sa journée. Le petit volume de colis transportés par chaque véhicule fait que la capacité des véhicules n'est pas contraignante.

4.2.2. Etude de la répartition des demandes.

Une grande proportion des colis ramassés par le service de Poste Prioritaire dans la région de Montréal est envoyée à l'extérieur de cette zone. Comme nous voulions étudier la répartition géographique des demandes avec origine et destination dans la région de Montréal, nous avons dû compiler les demandes de plusieurs jours pour obtenir un échantillon approprié. Nous avons recueilli 361 demandes téléphoniques et 1196

demandes issues des succursales pour une période de 5 jours consécutifs en Mars 86.

A partir des sections, nous définissons le marché "local" comme l'ensemble des demandes dont l'origine et la destination tombent dans la même section et le marché "adjacent" comme l'ensemble des demandes dont l'origine est dans une section et la destination dans la même section ou dans une section adjacente à cette section. Deux sections sont dites adjacentes si elles ont une frontière commune ou si elles sont reliées par un pont. On peut constater que la répartition des points d'origines et de destinations est très dispersée sur l'ensemble du territoire avec une plus grande densité au centre-ville (autour de 30% des origines et destinations).

Pourcentage des marchés locaux et adjacents

origine:	marché local	marché adjacent	nombre de demandes
sur appel par section	10%	38%	100%=361
posté dans une succ. par section	8%	35%	100%=1196
sur appel par division	21%	-	100%=361
posté dans une succ. par division	18%	-	100%=1196

On voit par le tableau précédent que les marchés locaux et adjacents sont peu importants, ce qui entraîne beaucoup de déplacements pour des véhicules qui effectueraient la cueillette et la livraison la même journée: 65% des demandes ont leur destination à l'extérieur de la région d'adjacence. Les deux tableaux suivants présentent la distribution des déplacements entre les sections et entre les divisions.

destinations(divisions)

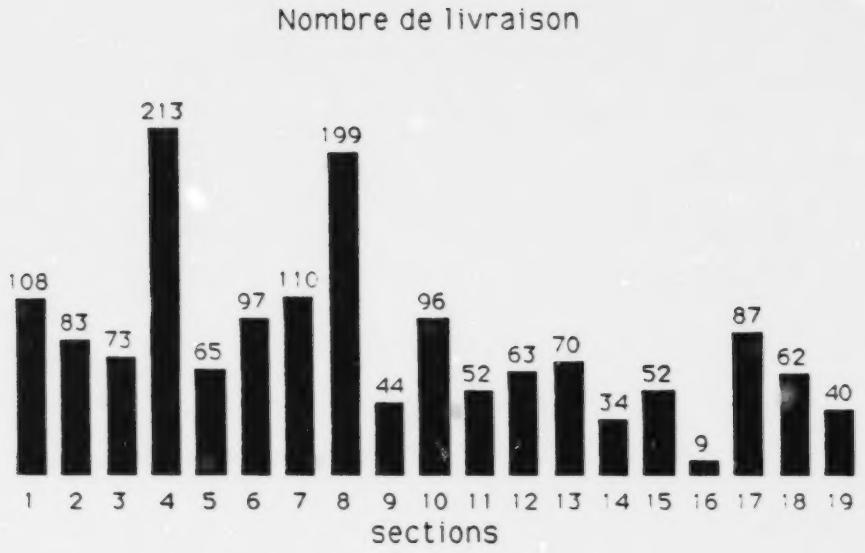
		1	2	3	4	5	6	7	8	total
origines (divisions)	1	64	62	23	41	24	11	17	17	259
	2	71	98	30	79	57	15	31	49	430
	3	11	25	19	20	15	2	4	4	100
	4	77	119	49	85	38	15	26	13	422
	5	10	59	6	10	17	7	1	5	115
	6	4	15	1	4	1	0	2	0	27
	7	20	48	16	22	9	2	9	13	139
	8	7	30	4	11	6	0	6	1	65
	total	264	456	148	272	167	52	96	102	1557

origines (divisions)	destinations (sections)																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	total
	21	7	16	16	8	11	6	13	3	10	6	7	6	3	6	0	7	2	6	154
	3	3	1	2	0	2	4	8	1	3	2	2	1	3	0	0	4	5	1	45
	5	5	3	13	4	4	2	4	2	2	0	0	2	0	5	0	6	2	1	60
	9	8	2	20	4	10	8	19	1	7	2	6	6	2	5	1	5	14	8	137
	10	5	9	13	9	6	14	9	6	8	4	7	6	0	4	2	7	2	0	121
	2	5	7	14	4	9	5	19	2	4	3	3	3	1	5	0	5	3	2	98
	14	13	12	35	7	12	19	15	6	20	10	8	4	6	6	2	10	5	1	205
	20	17	10	23	11	14	26	17	1	12	8	11	24	7	10	4	19	15	2	261
	1	4	0	9	3	3	0	5	3	0	1	0	1	0	0	0	2	0	0	32
	3	2	2	5	1	4	12	6	7	10	3	3	5	4	2	0	4	2	0	75
	2	0	2	4	1	1	1	3	0	3	3	2	1	0	0	0	0	0	2	25
	2	1	2	9	0	4	3	22	0	1	0	4	0	0	3	0	1	1	0	53
	1	2	2	7	0	0	2	2	1	1	1	4	5	1	2	0	0	2	0	33
	0	0	0	5	0	1	0	11	2	3	0	0	1	2	2	0	0	1	1	29
	2	1	1	9	1	2	1	6	0	1	0	0	0	1	0	0	2	0	0	27
	9	5	2	10	4	5	1	8	2	2	7	0	5	2	2	0	7	3	1	75
	3	1	0	10	4	4	4	17	1	6	1	2	0	0	0	0	2	4	5	84
	1	3	2	8	2	2	1	11	5	3	1	3	0	0	0	0	4	0	0	46
	0	1	0	1	2	3	1	4	1	0	0	1	0	2	0	0	2	1	0	19
total	108	83	73	213	85	97	110	199	44	96	52	63	70	34	52	9	87	62	40	1557

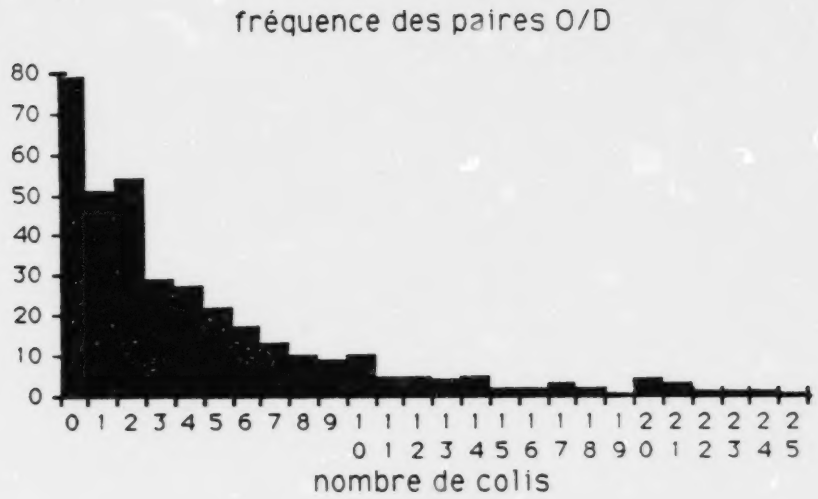
Un examen attentif de ces tableaux met en lumière la difficulté d'effectuer des regroupements d'envois compte tenu de la grande dispersion des origines et des destinations.

Si l'on regroupe les 3 sections du centre-ville, on peut voir que 28% de tous les envois ont leur origine au centre-ville et que seulement le cinquième de ceux-ci ont leur destination au centre-ville. De même, 31% de tous les envois ont leur destination au centre-ville. Laval et la Rive-Sud expédient presque exclusivement en dehors de leur territoire respectif. Au niveau des divisions, 60% des origines et des destinations se trouvent dans les trois divisions du centre de l'ile (divisions 2, 3 et 4).

Le tableau suivant illustre la distribution des envois suivant les sections pour les demandes issues des succursales et sur appel. Chaque section reçoit en moyenne 63 envois provenant des succursales i.e. seulement 3,3 envois par section. On voit donc que les demandes de transport sont très dispersées sur l'ensemble du terrritoire.



Enfin, le tableau suivant, qui illustre le nombre de paires origine-destination par quantité d'envois (19X19=361 paires o-d), vient confirmer le fait qu'il n'existe pas de grands axes de déplacements pour les demandes de transport.



Nous avons recompilé les tableaux en modifiant quelque peu les sections pour déterminer la sensibilité des résultats à la définition des sections et nous n'avons pu constater de changement appréciable dans les résultats obtenus.

Il est à remarquer que le marché local est relativement faible (de 8 à 10%). Par contre, on peut s'attendre à ce que ce marché soit plus important pour une compagnie offrant un service de livraison la même journée.

4.3. Conclusion.

Les enquêtes que nous avons menées ont permis de mettre en lumière l'importance du marché de la livraison par courrier, tant au point de vue du volume de la demande que du nombre de véhicules utilisés. Nous avons pu constater aussi la grande dispersion des points de cueillettes et de livraisons ainsi que la distance relativement grande entre les origines et les destinations (une moyenne de 7 km).

Ceci implique qu'on ne peut envisager d'utiliser un plan de répartition des demandes simple et fait à l'avance pour la cueillette et la livraison express. La vitesse et l'efficacité du chauffeur devient un facteur déterminant pour la rentabilité du service. Une structure d'organisation comme l'affectation d'un véhicule par origine-destination ou par groupe d'origines-destinations ne pourrait être productive pour des volumes faibles de demandes.

Pour le service de livraison le lendemain, l'utilisation d'un centre de tri qui sépare les cueillettes des livraisons permet une spécialisation des véhicules par zone à cause du regroupement possible des demandes et ceci engendre des économies d'échelle.

À la suite de ces enquêtes, il nous est apparu que la Société canadienne des Postes pouvait difficilement s'attaquer au marché de la livraison express en raison des conditions avantageuses consenties à ses employés par rapport aux conditions de travail des employés des compagnies

privées: les salaires, payés sur une base horaire, sont plus élevés que les salaires des chauffeurs des entreprise privées, payés à la pièce, ce qui est un grand incitatif de productivité. Les heures de travail sont aussi plus flexibles chez les transporteurs privés. Cependant, pour un service de livraison le lendemain, la productivité globale dépend plus d'une bonne planification et les économies d'échelle apparaissent rapidement.

Chapitre 5

L'AFFECTATION DE ZONES AUX VÉHICULES D'UN SERVICE DE MESSAGERIE.

Nous avons étudié l'organisation suivante pour le problème de la cueillette et la livraison de lettres et colis en milieu urbain: la journée est divisée en tranches de temps durant lesquelles chaque véhicule part d'un centre de tri, se rend dans un secteur très précis de la région pour y effectuer la cueillette et la livraison de colis, puis revient au centre pour faire trier les colis ramassés pour livraison dans la tranche de temps suivante. Le but visé par cette approche est d'allouer une zone à chaque véhicule de façon à faciliter la tâche du répartiteur et la confection des itinéraires de chacun des véhicules. Nous avons mis au point une méthode qui permet de séparer une région urbaine en zones affectées, chacune, à un seul véhicule, de façon à minimiser le nombre total de véhicules utilisés ou la distance totale parcourue par l'ensemble des véhicules. La première partie de la méthode permet de déterminer chacune des zones et le nombre moyen de points à visiter dans chacune de celles-ci. Un premier raffinement de la méthode permet de tenir compte de la variabilité journalière de la demande dans chacune des zones. Un deuxième raffinement permet de déterminer les zones lorsqu'on permet un certain chevauchement de celles-ci de telle façon qu'un véhicule surchargé puisse être soulagé par un véhicule d'une zone adjacente.

5.1. Introduction.

Le problème de la confection des meilleurs itinéraires possibles pour une flotte de véhicules affectés à la cueillette et la livraison de lettres et colis est un problème difficile à résoudre en raison de son caractère hautement combinatoire: l'augmentation exponentielle du nombre de solutions possibles en fonction du nombre de points à visiter empêche la conception d'une méthode optimale et générale de solution.

Une approche possible consiste à diviser le territoire à couvrir en zones affectées à chacun des véhicules, ce qui diminue la taille des problèmes de confection d'itinéraires à résoudre. Cet article examine la façon dont on peut déterminer la forme et l'orientation de ces zones de façon à minimiser le nombre de véhicules utilisés ou la distance totale parcourue par l'ensemble des véhicules.

Dans le problème que nous examinons, chaque véhicule doit, dans une période de temps fixe, partir d'un point central (dépôt où se trouve un centre de tri), se rendre à la zone qui lui est affectée pour y effectuer la cueillette et la livraison de lettres et colis (il doit livrer ce qui a été ramassé durant la période précédente) et retourner au dépôt pour y faire trier ce qu'il vient de ramasser. Compte tenu du petit nombre de lettres et colis qu'un véhicule peut ramasser durant une période donnée, on considère qu'il n'y a pas de contraintes de capacité sur les véhicules.

Ce modèle s'applique au transport de lettres et petits colis en région urbaine, marché dont la croissance a été fulgurante durant les cinq dernières années en Amérique du Nord. La forme d'organisation considérée dans ce chapitre devient intéressante lorsque le volume de la demande et la taille de la flotte sont suffisamment importants pour justifier l'utilisation d'un centre de tri.

Pour les besoins de l'analyse, nous considérons une région circulaire avec le dépôt situé au centre et les points à visiter distribués aléatoirement avec une densité qui décroit graduellement du centre vers la périphérie. Les points à visiter reposent sur un ensemble de rues formant un quadrillage fin en rayons et en arcs de cercle (ring-radial). Les zones sont formées en divisant la région en anneaux concentriques, puis en divisant chaque anneau en segments (appelés secteurs dans la suite) de façon à minimiser le nombre de véhicules utilisés ou encore la distance totale parcourue par l'ensemble des véhicules.

Newell et Daganzo[1986a] ont étudié le problème du design des zones lorsque les véhicules ont des limites de capacité. Ils ont utilisé la même géométrie (ring-radial) et les mêmes divisions en anneaux concentriques que dans cet article. Cependant, leur modèle ne s'applique pas au problème traité ici puisque la grandeur des zones était déterminée par la capacité des véhicules; dans le problème que nous considérons, il n'y a pas de relation directe entre la limite de temps et la limite de capacité: dans les itinéraires, la

portion de navette entre le dépôt et les différentes zones empêche la transformation des contraintes temporelles en contraintes de capacité. Par contre, la première partie de notre analyse présentera des analogies avec celle de Newell et Daganzo. Nous étudierons aussi l'impact de la variation journalière de la demande sur le design des zones.

Dans la section 5.2, nous allons rappeler quelques résultats présents dans la littérature sur lesquels s'appuiera la première partie de nos développements. Dans la section 5.3, nous présentons la méthode principale de découpage d'une région en zones, chacune affectée à un seul véhicule; quelques résultats numériques sont présentés. Nous réexaminons, dans la section 5.4, le découpage des zones en tenant compte de la variabilité journalière de la demande et nous traitons de la possibilité de chevauchement des zones dans le but de diminuer la variance de la demande et donc le nombre de véhicules nécessaires à une couverture adéquate de la région.

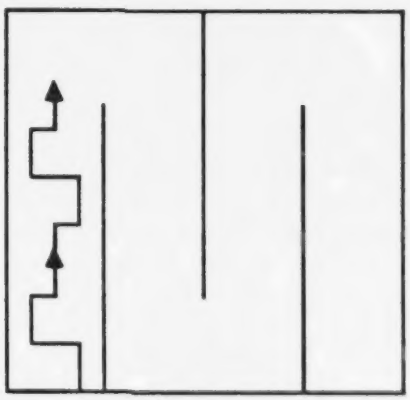
5.2. Notions préliminaires.

Pour pouvoir faire adéquatement la planification de zones pour la confection de tournées de véhicules, il est nécessaire de pouvoir estimer la longueur d'une tournée en fonction de la surface (et de la forme) de la zone. Larson et Odoni[1981] présentent la seule formule d'approximation connue: la longueur D d'une tournée optimale d'un véhicule visitant n points distribués aléatoirement et uniformément sur une zone de surface A est donnée par

$$D = k\sqrt{An}$$

Cette relation s'applique pour les métriques euclidienne et L_1. La valeur de k a été estimée à 0.765 (Stein[1978]) dans le cas euclidien, et elle n'est pas connue dans le cas de L_1. Cette relation n'est valable cependant que lorsque $n \geq 15$ et la surface suffisamment compacte et convexe. Il n'a pas été démontré que cette formule demeurait valable pour des régions de forme allongée. On peut présumer que pour des régions allongées de même surface la longueur de la tournée soit plus longue. Aussi la formule d'approximation est-elle inutilisable dans notre contexte où l'on doit déterminer la forme appropriée des zones de façon à minimiser les temps de parcours et de navette: en effet, on obtiendrait en utilisant cette formule une solution avec toutes les zones en pointe de tarte issue du centre (de façon à minimiser le temps de navette), ce qui de toute évidence n'est pas optimal.

Daganzo[1984a] a développé une formule approximative pour estimer la longueur d'une tournée de tous les point à visiter d'une région basée sur une stratégie sous-optimale; cette méthode, qui donne une longueur quelque peu supérieure à celle de la tournée optimale dans le cas d'une région compacte, a l'avantage de s'appliquer aussi pour les zones étroites et allongées, contrairement à la formule précédente.



La stratégie consiste à découper une zone à couvrir suivant une bande de largeur w et à visiter les points dans l'ordre longitudinal de la bande. La distance parcourue en utilisant cette stratégie est estimée à $0.9\sqrt{An}$ dans le cas euclidien et à $1.15\sqrt{An}$ dans le cas L_1. On peut s'attendre à ce que cette stratégie soit près de l'optimum pour des régions étroites. De plus, la construction des itinéraires est grandement facilitée si on utilise cette stratégie. Daganzo[1984a] a montré qu'il existe une largeur optimale de la bande dans la cas de la métrique L_1 (et dans le cas euclédien aussi).

Newell et Daganzo[1986a] ont montré que dans le cas d'une flotte de véhicules avec limite de capacité, les zones couvertes par chacun des véhicules devaient être de forme approximativement rectangulaire, allongée vers la source, et que l'ensemble des zones devait être disposé en anneaux concentriques.

Leur analyse permettait de déterminer les rayons des anneaux et le nombre de zones dans chaque anneau qui minimisent la distance totale parcourue par les véhicules. Pour obtenir une approximation de la longueur des tournées dans chacune des zones, ils ont utilisé la stratégie de bande de Daganzo[1984a]. Ils ont de plus démontré que la largeur optimale de la bande dans une zone approximativement rectangulaire d'un anneau concentrique était:

$$w_0 = (3/2\partial)^{1/2}$$

où ∂ est la densité (le nombre de points par unité de surface).

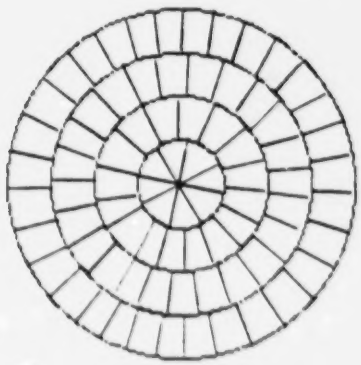
Pour minimiser le temps de navette, il suffit que la bande débute et se termine sur le côté du secteur le plus près de la source. De plus, chacune des zones est divisée en deux bandes de telle sorte que le véhicule ne fasse qu'un aller-retour dans celle-ci.

On trouve dans la littérature un certain nombre d'autres travaux sur les méthodes approximatives de planification stratégique en fonction de la distribution de la demande: Burns et al.[1985], Daganzo[1978,1984b,c, 1985a,b,c,], Daganzo et Newell[1986], Newell et Daganzo[1986b,c] et Han

[1984]. Ces travaux portent sur des problèmes différents de celui traité dans cet article et, conséquemment, ne seront pas explicités ici.

5.3. Le design des zones.

Si l'on découpe une région circulaire suivant des zones approximativement rectangulaires et allongées vers le centre, nous obtenons un ensemble de zones disposées en anneaux concentriques:

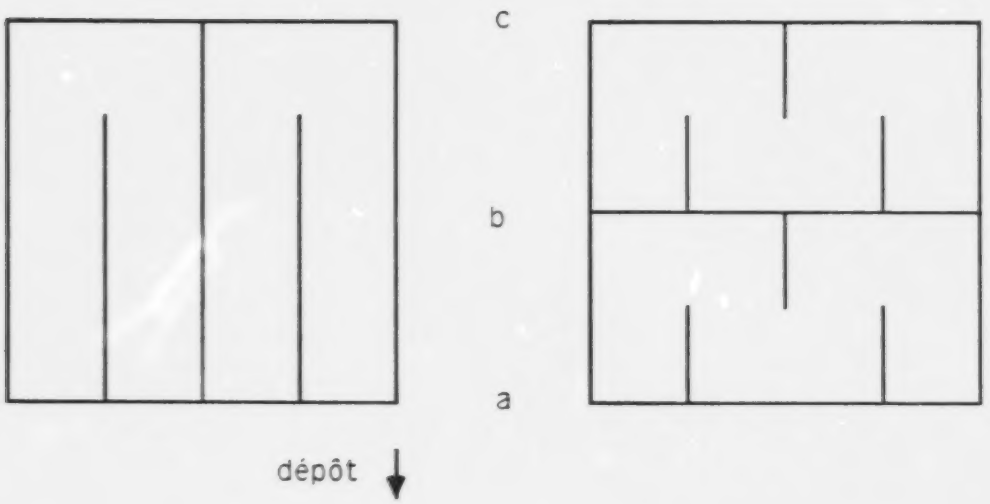


Nous allons examiner de quelle façon on doit découper les zones i.e. spécifier les rayons intérieurs et extérieurs de chaque anneau et le nombre N_k de zones par anneau.

5.3.1. Formulation.

Nous allons considérer que chacun des secteurs est de largeur approximativement 2w de facon à ce qu'un véhicule ne fasse qu'un aller-retour dans celle-ci, à partir du point le plus près de la source. Le fait de commencer et terminer la tournée des points de cueillette et de livraison d'un secteur sur le coté le plus près du centre minimise la distance de navette.

D'autre part, utiliser des zones de largeur 2w pour ne faire qu'un seul aller-retour se justifie par la perte d'efficacité qu'entraîne l'augmentation de la distance de navette si on utilise des zones de largeur plus grande que 2w. On peut comparer, par exemple, les solutions de deux décompositions d'une région, l'une en deux zones de largeur 2w et l'autre en deux zones de largeur 4w: les quatre zones ainsi formées sont de surfaces égales et peuvent être servies dans le même temps par un véhicule.



solution 1: 2 zones de largeur 2w solution 2: 2 zones de largeur 4w

(a, b et c sont les distances mesurées depuis le dépôt)

Si on utilise la formule d'approximation de la section précédente pour calculer la longueur de la tournée avec la stratégie de bande, la solution 1 donne une distance totale :

$$D_1 = 2k\sqrt{An} + 4a$$

où A est la surface d'une zone et n le nombre de points à visiter; 4a correspond à la distance de navette. La solution 2 donne une distance totale:

$$D_2 = 2k\sqrt{An} + 2a + 2b.$$

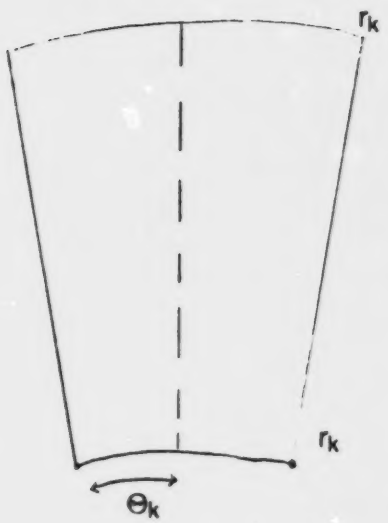
On a donc $D_2 - D_1 = 2(b-a) > 0$. La solution 1 est donc préférable.

Pour évaluer la distance totale parcourue par l'ensemble des véhicules, nous allons séparer la distance parcourue par le véhicule en distance radiale (incluant la distance de navette du dépôt à la zone aller-retour) et distance transverse.

Si la densité des points varie en fonction du rayon ($\partial(r)$), alors le nombre de points dans le $k^{ième}$ anneau de rayon intérieur r_{k-1} et de rayon extérieur r_k est donné par:

$$\int_{r_{k-1}}^{r_k} 2\Pi\partial(r)rdr$$

Pour un secteur de cet anneau (chaque secteur correspond à la région affectée à un seul véhicule), Θ_k correspond à la moitié de l'angle. Si les points sont visités dans chaque demi-secteur dans l'ordre de leur distance radiale depuis l'origine, le déplacement moyen transverse d'un point situé à une distance r jusqu'au point suivant est $r\Theta_k/3$.



La distance totale transverse dans un anneau est donnée par:

$$\int_{r_{k-1}}^{r_k} 2\Pi\partial(r)\Theta_k r^2 dr/3 \qquad \text{avec } \Theta_k = \Pi/N_k$$

où N_k est le nombre de véhicules (ou de secteurs) dans le kième anneau

La distance totale transverse peut donc s'écrire:

$$\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{2\Pi\partial(r)\Pi r^2}{3N_k} dr = \frac{2\Pi^2}{3N_k} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \partial(r) r^2 dr$$

Devant partir du dépôt au centre de la région circulaire, se rendre à la zone qui lui est affectée, effectuer la cueillette et la livraison dans sa zone puis revenir au dépôt dans un temps fixe, chaque véhicule d'un anneau doit donc satisfaire la contrainte temporelle suivante (on a une contrainte par anneau):

temps de parcours local + temps de livraison + temps de navette $\leq T$ (1)

où T est la période de temps considérée

Le **temps de parcours local** (T_1), pour un véhicule du $k^{ième}$ anneau, est le temps du trajet pour faire le tour de tous les points de cueillette et de livraison de la zone considérée. Pour l'obtenir, on doit diviser par la vitesse v la somme du temps de déplacement transverse et du temps de déplacement radial:

$$T_1 = \frac{1}{v}\left[\frac{2\Pi^2}{3N_k^2} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \partial(r) r^2 dr + 2(r_k - r_{k-1}) \right]$$

Nous appelons **temps de livraison** (T_2), pour un véhicule du $k^{ième}$ anneau, le temps de manutention pour effectuer la livraison (ou la cueillette) chez le client. Il est obtenu en multipliant le nombre de points à visiter dans un secteur par le temps de manutention (fixe) chez un client(t^{liv}):

$$T_2 = \frac{2\Pi}{N_k} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \partial(r) r dr \cdot t^{liv}$$

Le **temps de navette** (T_3), pour un véhicule du $k^{ième}$ anneau, est le temps pour parcourir (aller-retour) la distance séparant le dépôt du rayon intérieur du secteur:

$$T_3 = \frac{2r_{k-1}}{V}$$

L'équation (1) s'écrit donc

$$T_1 + T_2 + T_3 \leq T$$

ou encore, pour un véhicule du $k^{ième}$ anneau:

$$\frac{1}{v}\left[\frac{2\Pi^2}{3N_k^2}\int_{r_{k-1}}^{r_k}\partial(r)r^2dr + 2(r_k - r_{k-1})\right] + \frac{2\Pi t^{liv}}{N_k}\int_{r_{k-1}}^{r_k}\partial(r)rdr + \frac{2r_{k-1}}{v} \leq T \qquad (2)$$

Le temps d'utilisation des véhicules dépend des N_k et des r_k qui doivent être déterminés de façon à satisfaire la contrainte (2) et à minimiser le nombre de véhicules ou la distance totale parcourue par l'ensemble des véhicules.

La fonction objective s'écrit:

$$\text{Min } D = \sum_k\left[\frac{2\Pi^2}{3N_k}\int_{r_{k-1}}^{r_k}\partial(r)r^2dr + 2r_kN_k\right] \qquad (3a)$$

pour la distance totale ou

$$\text{Min } \sum_k N_k \qquad (3b)$$

pour le nombre total de véhicules.

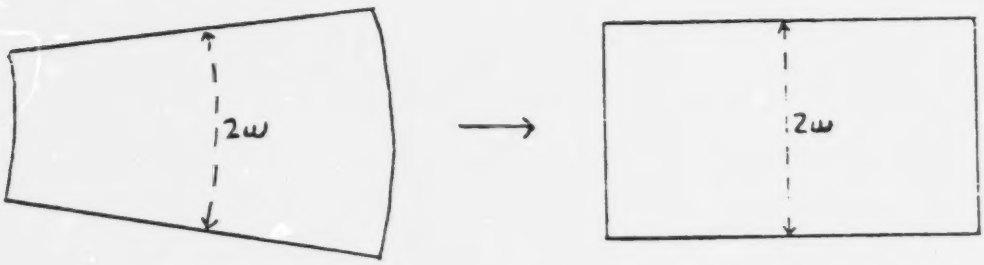
5.3.2. Résolution.

Nous allons reformuler le problème sous une forme plus facile à résoudre, puis nous allons montrer l'équivalence des objectifs (3a) et (3b) et finalement, nous présenterons l'algorithme de solution et des résultats.

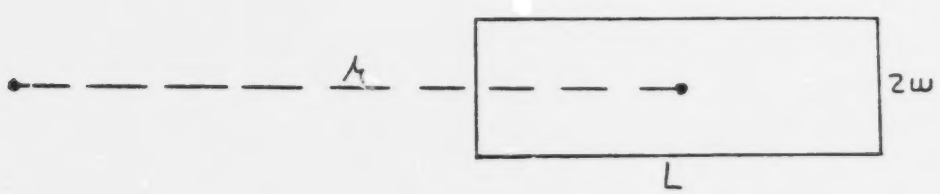
5.3.2.1. Reformulation pour l'objectif de minimisation de la distance

Nous allons considérer le problème de la minimisation de la distance totale. La minimisation du nombre total de véhicules sera traitée à la section 5.3.2.2. Le programme mathématique précédent (relations (2) et (3a)) est difficile à résoudre en raison de la présence d'intégrales et, plus important, dû au fait que le nombre de contraintes n'est pas connu a priori. Pour contourner ces difficultés, nous reformulons le problème de façon à prendre en ligne de compte un seul anneau à la fois et nous utilisons une méthode approximative; nous considérons une zone dont le centre est à une distance r du dépôt et nous allons déterminer la largeur qui minimise la distance totale par unité de surface; nous allons ensuite utiliser cette largeur optimale pour déterminer les rayons des anneaux et le nombre de zones dans chacun de ceux-ci, en partant de la périphérie vers le centre. Cette approche est d'autant justifiée que la contribution des anneaux les plus éloignés, qui contiennent plus de zones, est certes plus importante que celle des anneaux les plus près du dépôt.

L'analyse qui suit n'est pas valide pour l'anneau central où la forme des zones n'est pas approximativement rectangulaire. Le cas de l'anneau central est analysé à la section suivante.



Un secteur d'un anneau peut être approché par un rectangle de longueur $r_k - r_{k-1}$ et de largeur égale à la longueur de l'arc de cercle de rayon $(r_k + r_{k-1})/2$. Considérons une seule zone rectangulaire de largeur 2w, de longueur L et de surface A dont le centre est à une distance r du dépôt.



Nous voulons minimiser la distance parcourue par unité de surface. Nous allons supposer que $\partial(r)$ est constante sur l'intervalle $[r_{k-1}, r_k]$ tout en

variant d'un intervalle à l'autre. Dans le $k^{ième}$ intervalle, $\partial(r)$ est approchée par $\partial(r_k^*)$ la densité au centre de la zone où

$$r_k^* = \frac{r_k + r_{k-1}}{2} .$$

La distance parcourue par unité de surface est:

$$\frac{D}{A} = \frac{2r + \frac{A}{2w} + \frac{w\partial A}{3}}{A} = \frac{2r}{A} + \frac{1}{2w} + \frac{w\partial}{3} \qquad (4)$$

où le premier terme du numérateur représente la distance de navette du dépôt jusqu'au centre de la zone, le second terme la distance aller-retour du centre jusqu'à l'extrémité de la zone et le dernier terme la distance transverse.

On peut démontrer directement (en prenant la dérivée) que cette fonction, pour A et r fixés, est minimisée pour $w_0 = \sqrt{3/2\partial}$, ce qui est le même w_0 obtenu par Newell et Daganzo (1986a). La largeur optimale de la zone est donc indépendante de tous les paramètres excepté ∂.

La contrainte (2) peut s'écrire:

$$\frac{2r}{v} + \frac{A}{2wv} + \frac{w\partial A}{3v} + \partial A t^{liv} \leq T.$$

Comme (4) est une fonction décroissante de A pour un w fixé, A devrait être prise aussi grande que possible. Autrement dit, la contrainte doit être saturée.

Avec A = 2wL, la contrainte devient:

$$2r + L + \frac{2w^2\partial L}{3} + 2\partial wLt^{liv}v = Tv. \qquad (5)$$

ou

$$2\partial wL\left(\frac{w}{3v} + \frac{1}{2\partial wv} + t^{liv}\right) = T - \frac{2r}{v}$$

où le terme de droite est le temps disponible moins le temps nécessaire à la navette aller-retour jusqu'au centre de la zone. 2wL correspond au nombre de points par zone i.e. à la capacité effective d'un véhicule, qui est fonction de la distance jusqu'au dépôt. Le terme (.) à gauche représente le temps moyen de livraison par point et est composé du temps moyen pour le déplacement transverse plus le temps moyen pour le déplacement longitudinal (en excluant la navette) plus le temps de manutention à chaque point (t^{liv}).

Si nous remplaçons w par $\sqrt{3/2\partial}$, la longueur optimale, l'équation (5) devient:

$$L\left(2 + \sqrt{6\partial}\, t^{liv}v\right) = Tv - 2r \qquad (6)$$

et L, la longueur de la zone, est donnée par:

$$L = \frac{Tv - 2r}{2 + \sqrt{6\partial}\, t^{liv}v}$$

On peut voir la dépendance de L sur tous les paramètres et cette dernière équation illustre de quelle façon la longueur de la zone varie en fonction des paramètres T,v,∂,et t^{liv}.

Comme $L = r_k - r_{k-1}$ et $r = (r_k + r_{k-1})/2$,l'équation (6) peut être utilisée récursivement pour trouver les r_k. Cette procédure est décrite plus en détail à la section 5.3.2.3.

5.3.2.2. Équivalence des objectifs

Nous allons démontrer que minimiser le nombre de véhicules est équivalent à minimiser la distance totale (pour tous les anneaux sauf peut-être celui du centre) et qu'ainsi la méthode précédente demeure valable pour l'un ou l'autre des objectifs.

Nous avons démontré dans la sous-section précédente que, pour minimiser la distance totale, les contraintes devaient être saturées, i.e. que les véhicules devaient être toujours occupés. Pour minimiser le nombre de véhicules, ils devraient aussi être constamment occupés excepté, peut-être ceux de l'anneau central. Soit $N' = \sum_{k \neq 1} N_k$, on a alors:

$$N'.T = \text{temps total de déplacement + temps total de manutention}$$

$$= \frac{D'}{v} + K$$

où D' est le déplacement total pour tous les anneaux sauf le premier et K, le temps (fixe) de visite de tous les points dans ces anneaux.

Ainsi, puisque T, v et K sont constants et positifs, minimiser N' revient à minimiser une fonction linéaire croissante de D' et est donc équivalent à minimiser D' (cette équivalence n'est pas valide pour l'anneau central où les véhicules peuvent ne pas être pleinement occupés durant la période T).

5.3.2.3. Algorithme de solution

Pour le kième anneau où $r = (r_k + r_{k-1})/2$, $\partial = \partial[(r_k + r_{k-1})/2]$ et $L = r_k - r_{k-1}$, l'équation (6) peut être écrite ainsi:

$$3r_k - r_{k-1} + (r_k - r_{k-1})t^{liv}\, v\sqrt{6\partial[(r_k + r_{k-1})/2]} = Tv. \qquad (7)$$

Ainsi, en partant de l'anneau extérieur, les r_{k-1} peuvent être trouvés successivement en allant vers le centre par l'équation (7). Lorsque les r_{k-1} sont connus, on détermine le nombre de zones dans chaque anneau.

Pour le kième anneau, le nombre de zones N_k est donné par:

$$N_k = \frac{\text{circonférence moyenne}}{\text{largeur optimale de zone}} = \frac{2\Pi(r_k + r_{k-1})/2}{2w_0}$$

Comme $w_0 = (3/2\partial)^{1/2} = \left(\frac{3}{2\partial[(r_k + r_{k-1})/2]}\right)^{1/2}$,

alors
$$N_k = \frac{\Pi(r_k + r_{k-1})}{\sqrt{6}}\sqrt{\partial[(r_k + r_{k-1})/2]} \qquad (8)$$

La méthode peut être résumée comme suit:

1. A partir de l'anneau le plus à l'extérieur (r_k=R=rayon de la région), on trouve le r_{k-1} qui sature l'inéquation (7). On peut utiliser une méthode de bissection par exemple.

2. L'équation (8) nous permet de trouver, à partir des r_k, les N_k que l'on arrondit à l'entier le plus près.

3. On peut réajuster les r_k par l'équation (8) en utilisant les N_k entiers trouvés en 2. Et l'on répète la procédure (étapes 1 à 3) pour chacun des anneaux en allant vers le centre.

4. On calcule la distance totale par (3a):

$$\text{Min } D = \sum_k \left[\frac{2\Pi^2}{3N_k} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \partial(r) r^2 dr + 2r_k N_k \right] \quad \text{(3a)}$$

ou le nombre total de véhicules par (3b):

$$\sum_k N_k$$

De façon à simplifier (3a), on peut utiliser la même approximation linéaire de la fonction $\partial(r)$ que l'on a déjà utilisée. Dans le kième intervalle, $\partial(r)$ est approchée par $\partial(r_k^*)$ où

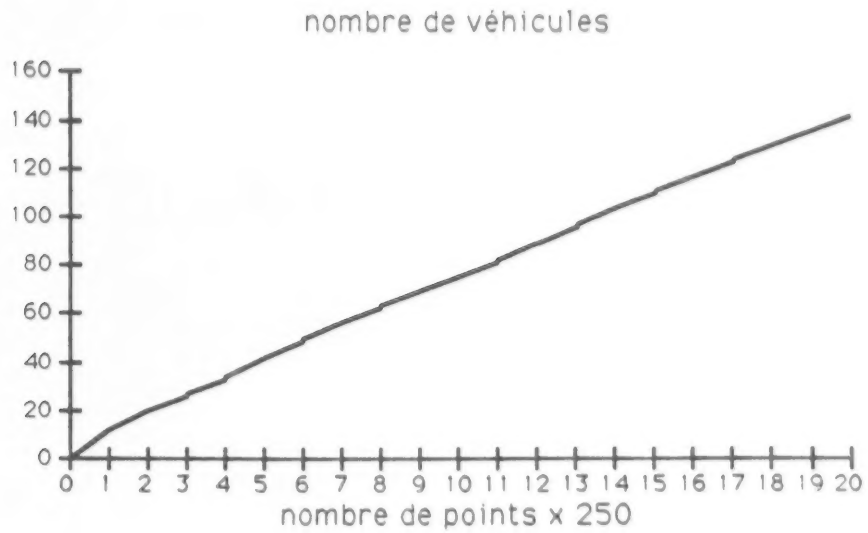
$$r_k^* = (r_k + r_{k-1})/2$$

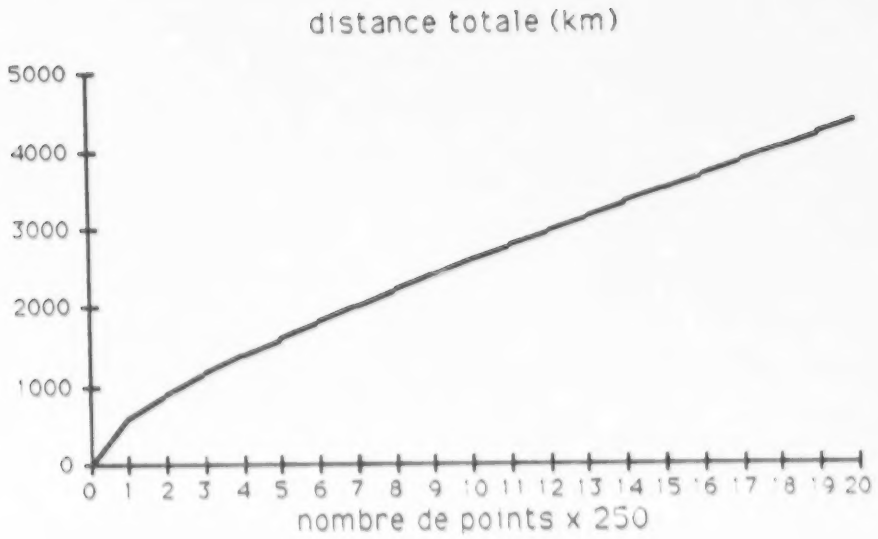
La fonction objective (3a) devient:

$$D = \sum_k \left[\frac{2\Pi}{9N_k} \partial(r_k^*)(r_k^3 - r_{k-1}^3) + 2r_k N_k \right]$$

5.3.2.4. Résultats numériques.

Nous avons utilisé l'algorithme précédent pour déterminer le découpage des zones en faisant varier les paramètres T,t^{liv} et n. Le rayon de la région a été fixé à 15 km et la vitesse des véhicules à 30 km/h. Les deux premiers tableaux présentent les résultats obtenus pour le nombre de véhicules et la distance totale parcourue en fonction du nombre de points à visiter avec T=4 h. et t^{liv}=5 min.





Ce dernier tableau fait clairement ressortir l'économie d'échelle obtenue à mesure que le nombre de points augmente. Nous avons ensuite déterminé le découpage en donnant successivement les valeurs de 4, 2.67 et 2 h. au paramètre T (période de planification), 3 et 5 min. au paramètre t^{liv} (temps de livraison) et 1000, 2000, 3000, 4000 et 5000 au paramètre n (nombre total de points).

Les résultats suivants sont conformes à l'équation (6). Nous avons observé que plus le temps de livraison diminue, plus la forme des zones s'allonge en direction du centre. De même, plus la période de planification est grande, plus la forme des zones est allongée. Ainsi, la forme est d'autant plus allongée que le nombre de points à visiter par un véhicule est grand. Nous avons aussi constaté que la forme des zones i.e. le rapport de la longueur sur

la largeur varie peu en fonction de la densité. Nous présentons dans le tableau suivant les résultats obtenus pour n=3000:

T	2h		2.67h		4h	
tliv	3 min	5 min	3 min	5 min	3 min	5 min
nombre d'anneaux	5	8	4	6	3	4
nombre de véhicules	145	221	99	146	60	89
distance totale(km)	4164	5657	3159	4118	2438	2969
nombre moyen de colis/véh.	20.6	13.6	30.4	20.5	49.9	33.6

On voit que plus la période s'allonge, plus le nombre de véhicules, la distance totale parcourue et le nombre d'anneau diminuent alors que le nombre moyen de colis par véhicule augmente.

Voici les résultats détaillés obtenus pour chacun des anneaux lorsque t_{liv}=5 et n=3000 (résultats obtenus après les étapes 1 et 2 de l'algorithme i.e. avant d'arrondir les résultats). Il faut noter que faire varier le paramètre t_{liv} à la baisse est équivalent à faire varier le paramètre T à la hausse.

anneaux	rayon intérieur(km)	nb de véh.	dist./véh.(km)	surf./véh.(km^2)	longueur/largeur	
			T=4			
1	0	1.5	3.2	0.9	-	
2	0.7	13.2	22.2	6.8	3.3	
3	5.4	30.7	30.2	7.6	3.0	
4	10.2	43.9	39.8	8.7	2.7	
			T=2.67			
1	0	0.7	1.4	0.4	-	
2	0.3	8.2	14.4	4.4	2.2	
3	3.4	20.6	19.2	4.6	2.0	
4	6.4	31.1	24.8	4.7	1.8	
5	9.4	39.6	30.2	4.9	1.7	
6	12.2	46.1	35.5	5.1	1.5	
			T=2			
1	0	2.4	5.0	1.5	-	
2	1.1	9.8	11.7	3.3	1.6	
3	3.4	18.9	15.6	3.3	1.5	
4	5.6	26.7	19.6	3.3	1.3	
5	7.7	33.4	23.3	3.2	1.2	
6	9.7	39.0	26.9	3.2	1.1	
7	11.5	43.5	30.2	3.2	1.0	
8	13.3	47.1	33.4	3.2	0.9	

On voit que le nombre de véhicules par anneau et la distance parcourue par un véhicule augmentent du centre vers la périphérie. Le fait que la surface couverte par chacun des véhicules augmente aussi s'explique par la densité qui décroit vers la périphérie. On remarque que les surfaces deviennent de plus en plus carrées à mesure qu'on s'éloigne du centre.

Ces résultats varient peu lorsqu'on apporte de légères variations aux variables r_k et N_k. Ceci s'explique par le fait que la courbe de la fonction qui donne la longueur de la tournée est assez aplatie autour de la valeur optimale de la largeur w de la bande (voir le graphique p. 140 dans Daganzo (1984a) . De plus, Newell et Daganzo (1986a) ont noté, dans leur étude d'un système de design similaire à celui-ci, que le système complet est plutôt insensible à la valeur des différents paramètres s'ils sont choisis près de leur valeur optimale.

Nous avons finalement comparé les résultats obtenus pour visiter 4000 clients en 4 heures avec ceux obtenus en visitant deux fois 2000 clients en 2 heures, ce qui correspond à passer d'un service de livraison la même journée à un service de livraison en une demi-journée.

	dist. totale(km)	nb de véhicules	dist./véh.(km)	# colis/véh.
4000 clients en 4h.	3680	117	31.4	34
2x(2000 clients en 2h)	8118	152	53.2	26

Ce changement de service entraîne une augmentation de 30% du nombre de véhicules requis. Cette augmentation demeure la même lorsqu'on utilise d'autres valeurs des différents paramètres.

Dans la section suivante, nous allons examiner de plus près le design des zones pour les anneaux les plus intérieurs.

5.3.3. Les anneaux intérieurs.

La méthode précédente s'appuie sur le fait que les zones sont à peu près rectangulaires, et que pour une zone rectangulaire, on peut déterminer la largeur qui optimise la distance totale parcourue dans la zone. Cependant, pour les anneaux les plus près du centre, cette hypothèse de rectangularité n'est pas respectée et, particulièrement pour l'anneau central, la largeur optimale de bande w_0 n'est plus valide et le nombre de véhicules n'est certainement pas optimal.

Aussi utilisons-nous une méthode différente: le design des zones de l'anneau central consiste à le diviser en zones en forme de pointes de tarte; les véhicules voyagent du dépôt vers le rayon extérieur sur un des côtés de la zone et reviennent sur l'autre côté tout en visitant les points dans l'ordre radial. Les résultats obtenus par cette méthode sont ensuite comparés avec ceux obtenus par la méthode précédente.

Si N est le nombre de véhicules et R le rayon de l'anneau central, le problème à résoudre s'écrit:

$$\text{Min } D = \frac{2\Pi^2}{3N} \int_0^R \partial(r) r^2 dr + 2RN$$

ou

$$\text{Min } N \quad \text{(nombre de véhicules)}$$

sous les contraintes

$$\frac{2\Pi^2}{3N^2 v} \int_0^R \partial(r) r^2 dr + \frac{2R}{v} + \frac{2\Pi t_{liv}}{N} \int_0^R \partial(r) r dr \leq T$$

N entier positif

Ce sont les mêmes équations que (2) et (3) sauf pour les bornes d'intégration et pour le fait qu'il y a une seule contrainte (on considère un seul anneau). Le problème à résoudre peut s'écrire avec une notation simplifiée:

$$\text{Min } \frac{a}{N} + bN \quad \text{ou} \quad N$$

s. c.

$$\frac{c}{N^2} + \frac{d}{N} \leq e$$

N entier positif

L'unique contrainte peut s'écrire comme une inéquation du second degré:

$$eN^2 - dN - c \geq 0$$

avec

$$c = \frac{2\Pi^2}{3v} \int_0^R \partial(r) r^2 dr > 0$$

et $$e = T - \frac{2R}{v} > 0$$

e > 0 parce que durant une période T, on doit avoir le temps de faire au moins un aller-retour du centre à la périphérie pour que le problème ait une solution.

Puisque c>0 et e>0, les deux racines r_1 et r_2 de l'équation sont de signes différents (r_2>0) et le domaine de solution se limite à [r_2, ∞[. On peut donc remplacer l'inéquation par

$$N \geq r_2 = \frac{d + \sqrt{d^2 + 4ec}}{2e}$$

Le problème est donc :

$$\text{Min}_N \frac{a}{N} + bN \quad \text{ou} \quad N$$

s. c.

$$N \geq r_2$$

N entier positif

Donc, la solution optimale, dans le cas où l'on veut minimiser N, est donnée par la racine r_2 arrondie vers le haut. Dans le cas où l'on cherche à minimiser la distance totale, le minimum de la fonction objective, si l'on ne tient pas compte de la contrainte, est obtenu pour $N^* = (a/b)^{1/2}$.

Si N^* est réalisable, alors la solution est donnée par le moins coûteux des deux arrondis de N^* (à l'entier supérieur ou égal ou à l'entier inférieur ou égal). Sinon, la solution est obtenue en prenant la racine positive de la contrainte telle que décrite précédemment.

Les résultats numériques ont montré que lorsque les véhicules de l'anneau central sont loin d'être pleinement occupés sous le design original, il est préférable de combiner les deux anneaux les plus à l'intérieur pour effectuer la division en pointes de tarte, alors que la division uniquement de l'anneau central est préférable lorsque les véhicules sont presqu'entièrement occupés. Alors pour comparaison, on devrait mener les deux types de division et les résultats devraient être confrontés à ceux obtenus par les divisions rectangulaires.

En résumé, l'affectation des zones se fait en deux temps: en premier lieu, l'affectation est faite de la périphérie vers le centre en saturant, pour chaque anneau, la contrainte (7). Puis, cette méthode ne donnant pas de très bon résultats près du centre, on reconsidère la confection des zones dans les deux anneaux centraux par la méthode que nous venons de décrire.

5.4. Variabilité de la demande.

L'analyse précédente nous donne pour un certaine demande n, le nombre **moyen** n_k de points à visiter pour chacune des zones du kième anneau. Lorsque les zones sont définies, le nombre de points à visiter par période T dans une zone du kième anneau est distribué suivant une loi de Poisson $P(n_k)$ qui peut être approchée si $n_k > 5$ par une loi normale de moyenne $\mu_k = n_k$ et de variance $s_k^2 = n_k$.

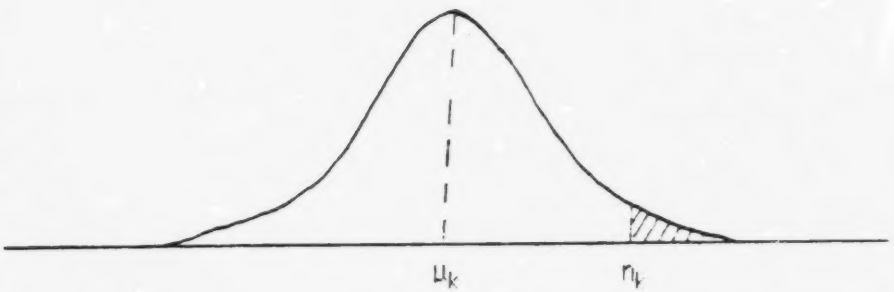
Ainsi, puisque les zones sont déterminées en fonction des nombres moyens, on peut s'attendre à ce que dans approximativement 50% des cas, le nombre de points à visiter dépasse la valeur n_k et qu'ainsi le véhicule n'ait pas le temps de tous les visiter. Pour palier à cette difficulté, nous pouvons déterminer les zones de façon à ce que, dans 85% des cas par exemple, le véhicule ait le temps de visiter tous les points.

5.4.1. Planification sans chevauchement des zones.

On veut déterminer des zones plus petites de façon à ce que les véhicules aient le temps de visiter tous les clients de leur zone dans 85% des cas. Si n est le nombre de points de cueillette et de livraison à visiter, nous planifierons le découpage de la région avec $n^+ > n$ de façon à obtenir des zones plus petites. Nous utiliserons une procédure itérative pour déterminer le n^+ adéquat:

1- Nous choisissons un $n^+ > n$ à partir duquel on peut déterminer, par la méthode de la section 3, le zonage "optimal" i.e le nombre N_k de zones et le nombre n_k de points par zones dans le kième anneau.

2 - Nous voulons déterminer le μ_k tel que $P[X>n_k] \leq \alpha$ avec $X \sim N(\mu_k, s_k)$. Soit z_α tel que $P[z>z_\alpha] = \alpha$ avec $z \sim N(0,1)$;



μ_k peut être déterminé par la solution de l'équation

$$\mu_k + z_\alpha \sqrt{\mu_k} = n_k$$

qui peut être transformée en équation quadratique:

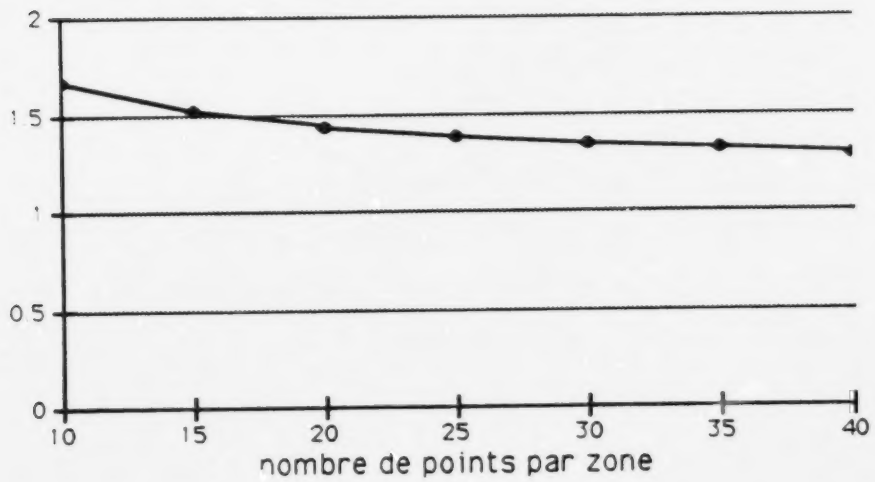
$$z_\alpha^2 \mu_k = (n_k - \mu_k)^2$$

3 - A partir des μ_k, on peut déterminer le nombre total de demandes pour l'ensemble de la région:

$$n' = \sum_k \mu_k N_k$$

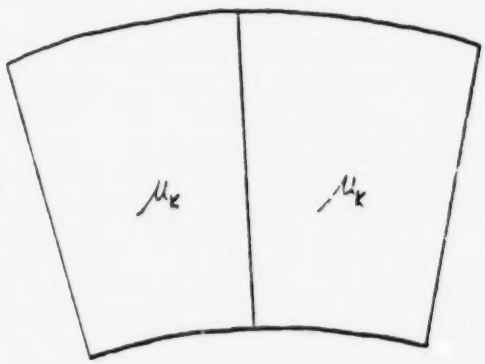
4 - Si n' n'est pas suffisamment près du n recherché, on recommence à l'étape 2 en augmentant ou diminuant n^+.

Le graphique suivant donne le ratio n_k/μ_k pour différentes valeurs de n_k. On retrouve les mêmes ratios quel que soit le nombre total de demandes n. Le graphique illustre donc l'augmentation des coûts (en terme de nombre de véhicules) nécessaire pour tenir compte de la variation journalière.



5.4.2. Planification avec chevauchement des zones.

Pour étudier le chevauchement possible des zones, nous allons regrouper les zones deux par deux de façon à diminuer la variance et ainsi diminuer le nombre de véhicules nécessaires pour obtenir une couverture suffisante dans x% des cas.



Soit μ_k, le nombre moyen de points dans une zone du $k^{ième}$ anneau. La variance est donnée par

$$s_k^2 = \mu_k.$$

Soit X_k la variable aléatoire du nombre de points dans deux zones adjacentes du $k^{ième}$ anneau, on a:

$$\mu(X_k) = 2\mu_k$$
$$\text{var}(X_k) = 2\mu_k$$

et si on divise en deux (ce qui correspond aux deux véhicules) le nombre de points, on obtient

$$\mu(X_k/2) = \mu_k$$
$$\text{var}(X_k/2) = (1/2)\mu_k$$

De façon générale, si on regroupe m zones adjacentes et que l'on permet la redistribution des points à visiter entre les m véhicules, la moyenne et la variance du nombre de points visités par chacun des véhicules sont:

$$\mu_m = \mu_k$$
$$s_m^2 = (1/m)\mu_k$$

Ainsi, pour une couverture au niveau a, le nombre de véhicules nécessaire est

$$n_k = \mu_k + z_\alpha\sqrt{\mu_k}$$

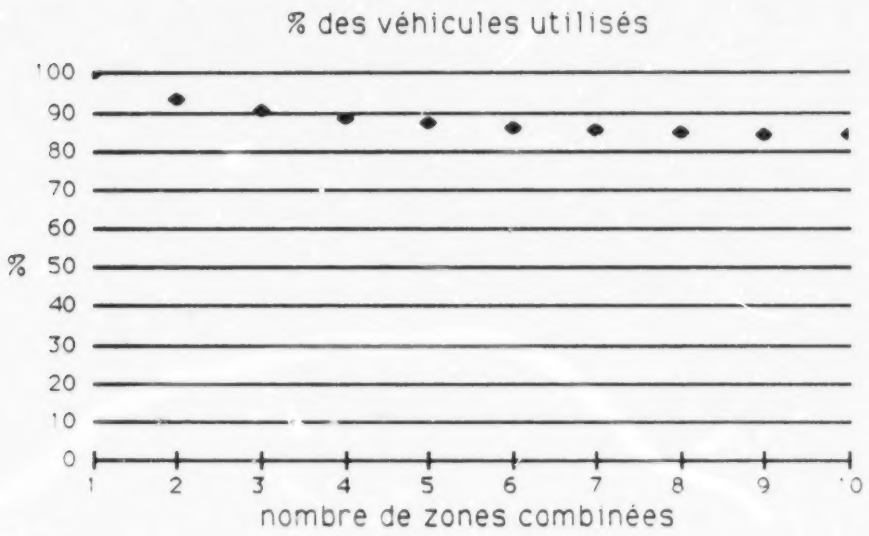
lorsqu'il n'y a pas chevauchement et

$$n_k' = \mu_k + z_\alpha\sqrt{(1/m)\mu_k}$$

lorsqu'il y a chevauchement de m zones.

Le gain sur le nombre de véhicules, lorsque l'on permet le chevauchement de 2 zones varie de 6 à 9% suivant n_k, le nombre de points par zone, et n, le nombre total de points. Le gain dû à l'ajout d'une zone supplémentaire diminue avec le nombre de zones conbinées. Le tableau

suivant indique le % de véhicules utilisés par rapport au nombre initial (sans chevauchement) lorsque l'on permet le chevauchement de zones pour $n=3000$ et $n_k=30$.



On voit qu'il existe un compromis (trade-off) entre le gain à réaliser et la difficulté à confectionner les itinéraires. En effet, plus on permet de chevauchement, plus le problème devient difficile à résoudre et l'organisation difficile à gérer.

5.5. Conclusion.

Nous avons développé une méthode analytique approximative de planification des zones de cueillette et livraison affectées aux véhicules d'une flotte. Cette méthode est simple à utiliser et permet d'évaluer la faisabilité de différents scénarios d'organisation d'un système de messagerie. De plus, nous avons adapté la méthode pour pouvoir tenir compte de la variabilité journalière de la demande. Enfin, dans la dernière section, nous avons évalué le gain possible au niveau du nombre de véhicules utilisés si l'on permet le chevauchement des zones de façon à diminuer la variance de la demande.

Nous avons montré que la méthode de design de zones pour la confection de tournées soumises à des contraintes de durée est similaire du point de vue "computationnel" à la méthode de Newell et Daganzo (1986) avec, cependant une capacité effective des véhicules de $2wL\partial$. Cette capacité est fonction de la localisation puisque L, la longueur de la zone, et ∂, la densité de points, sont fonctions de la distance au centre.

L'utilité de la méthode est reliée à l'importance d'une bonne planification stratégique. Le choix de la forme d'organisation la plus efficace peut entraîner, à notre avis, des gains de productivité plus importants que ceux permis par des décisions au niveau tactique (la confection au jour le jour des itinéraires, par exemple).

De plus, les résultats obtenus par notre méthode sont, malgré les approximations, plus représentatifs du comportement moyen sur une longue période que ceux d'un modèle tactique. Et, autre avantage, le développement, la calibration et l'utilisation d'un tel modèle sont certainement moins coûteux et moins longs à mettre au point, particulièrement si l'on veut tester plusieurs variantes d'organisations.

Les méthodes de confection de tournées utilisant principalement une approche de regroupement préalable par véhicule des points à visiter (cluster first), la forme des zones déterminée par notre méthode peut servir d'amorce à ce regroupement et donc, faciliter la confection des itinéraires, manuellement ou à l'aide d'un logiciel. Une fois le regroupement fait, la confection de l'itinéraire de chacun des véhicules peut être faite par une méthode approximative (la stratégie de Daganzo (1984a) , par exemple) ou par une méthode exacte. Pour une revue des algorithmes de confection des itinéraires, le lecteur pourra se référer à Bodin et al.[1983], Laporte et Nobert[1985] et Langevin[1986].

Chapitre 6

ETUDE PRATIQUE D'UN DÉCOUPAGE DE ZONES

L'objet de ce chapitre est d'illustrer comment la méthode de découpage de zone, développée dans le chapitre précédent peut être adaptée pour tenir compte de contraintes géographiques particulières comme les obstacles naturels (rivières, montagnes, etc.), la configuration du réseau routier (ponts, voies rapides, etc.), la distribution de la demande dont la densité peut ne pas varier en fonction du rayon, l'emplacement du dépôt, etc.

Le résultat fondamental de la section 3 du chapitre 4 nous permet de déterminer les dimensions optimales d'une zone en fonction de son éloignement du dépôt et en fonction de la densité moyenne dans la zone. La méthode permet ainsi de déterminer le nombre de points à visiter pour un véhicule en fonction de la localisation de la zone.

Dans la section 6.1, nous allons utiliser les résultats du chapitre précédent pour déterminer la grandeur des zones en allant de la périphérie de la région métropolitaine de Montréal vers le centre-ville. Dans la section 6.2, nous décrivons les caractéristiques que devrait posséder un logiciel d'aide à la décision intégrant les résultats du chapitre précédent.

6.1. Planification de zones pour la région métropolitaine de Montréal.

Le processus que nous allons illustrer dans cette section ne détermine pas les frontières précises pour chacune des zones mais donne une idée de la grandeur des zones ou du nombre de véhicules requis suivant la section. Ces informations pourraient permettre à un planificateur de définir les zones de cueillette en se servant de son jugement et son expérience.

Nous avons utilisé les données du service de Poste Prioritaire de la Société canadienne des Postes pour la région métropolitaine de Montréal qui comprend l'île de Montréal, la ville de Laval et une partie de la Rive-Sud. Les 1557 points à visiter sont distribués suivant les 19 sections que nous avons créées en regroupant les RTA (Région de tri d'acheminement) utilisées par les postes et qui sont désignées par les 3 premiers caractères du code postal. Nous appelons "section" chacun des assemblages de RTA que nous avons défini et "zone" la région couverte par un seul véhicule. Nous avons donc évalué la surface des 19 sections, ce qui nous a permis de calculer la densité de chaque section. Les densités (nombre de points/km2) des différentes sections sont présentées sur la figure 6.1.

(DENSITÉ) → n/km² pour 1557 points

SECTIONS

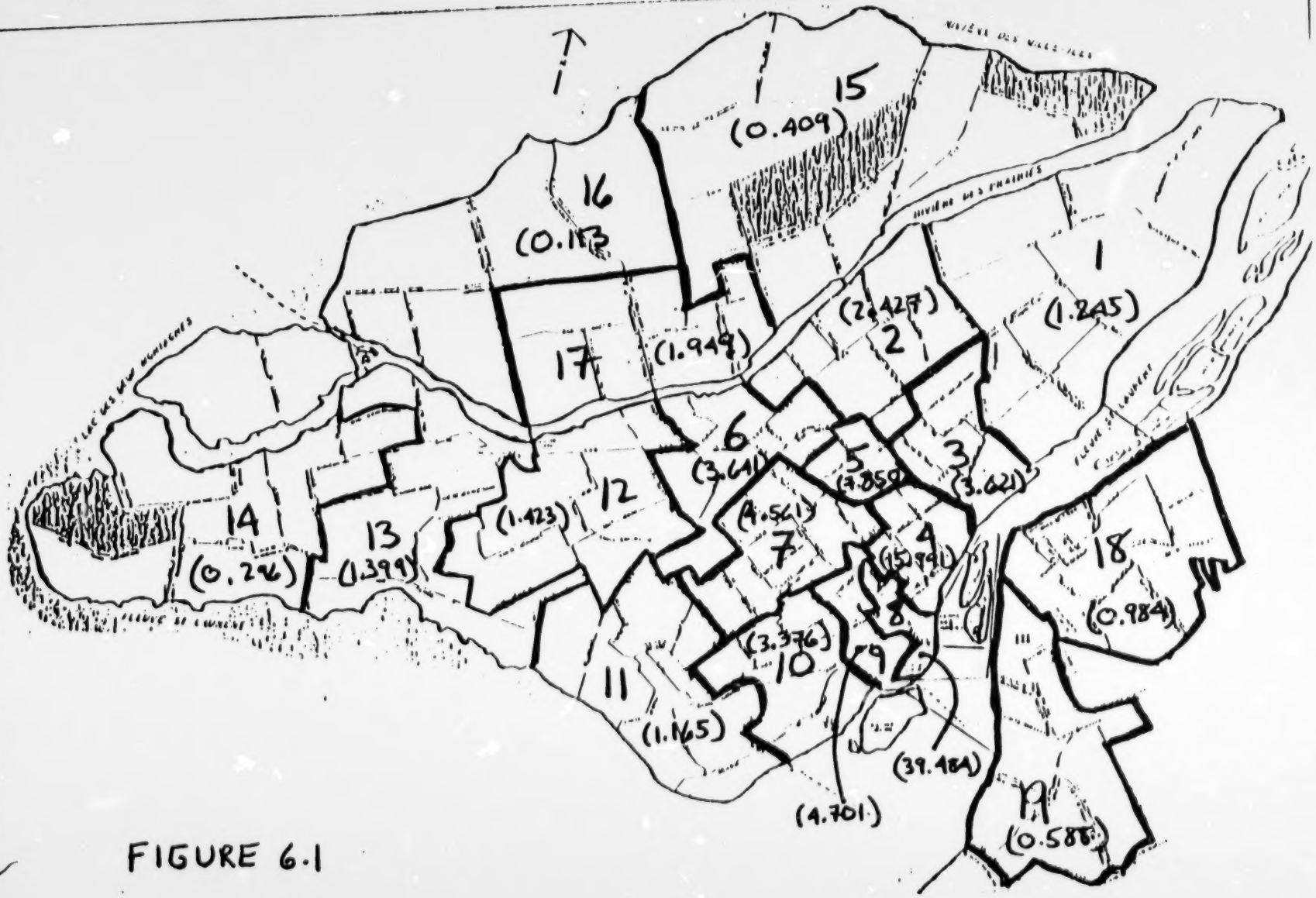
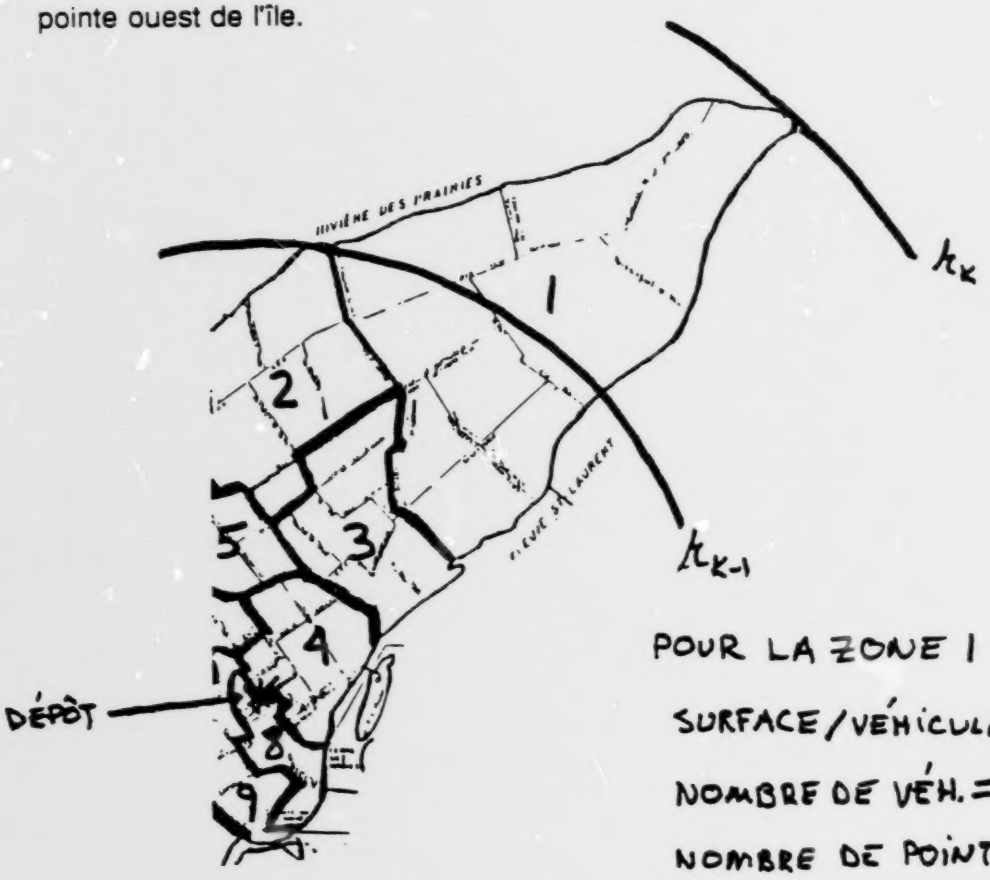


FIGURE 6.1

Nous avons localisé un dépôt fictif au centre-ville. On peut constater que sur l'île de Montréal la densité décroît à partir du dépôt vers le nord, vers la pointe est de l'île et vers la pointe ouest. La densité à Laval est faible avec une densité un peu plus forte sur la partie la plus près du dépôt. Sur la Rive-Sud, la densité est faible.

Nous allons d'abord appliquer la méthode à la pointe est de l'île de Montréal. Nous pouvons donc faire abstraction de Laval, la Rivière-Sud et la pointe ouest de l'île.



POUR LA ZONE 1 :

SURFACE/VÉHICULE = 19,9 km²

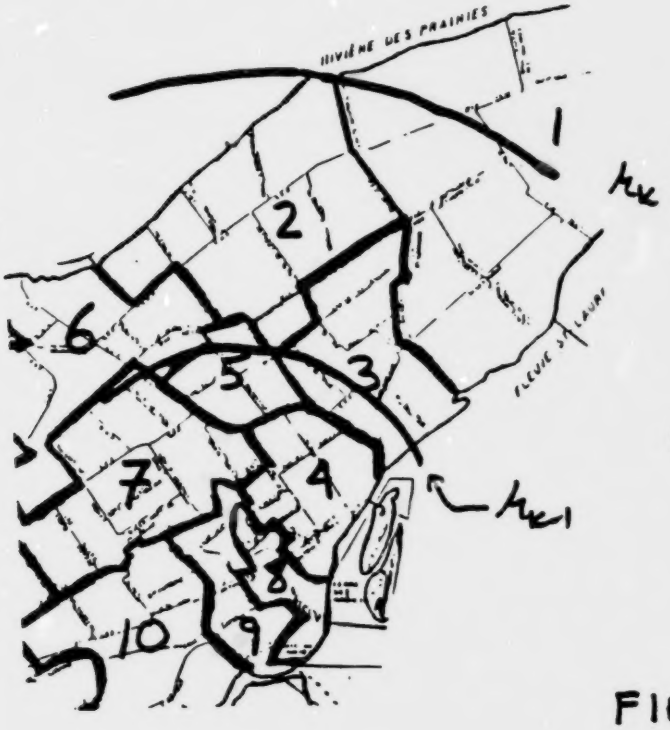
NOMBRE DE VÉH. = 4,36.

NOMBRE DE POINTS/VÉH. = 24,8

FIGURE 6.2

En prenant comme rayon extérieur (r_k) la distance du dépôt à l'extrémité de la pointe est de l'île de Montréal, on peut déterminer par l'équation (7) du chapitre précédent le rayon intérieur (r_{k-1}). Les valeurs de r_k et r_{k-1} sont illustrés sur la figure 6.2. Ayant obtenu N_k le nombre de zones dans l'anneau complet (si on avait la même densité dans tout l'anneau), on peut facilement déduire la surface que devrait couvrir un véhicule (19,9 km2) et le nombre de points desservis par un véhicule (24,8). Ainsi, si on avait à découper la section 1 en surface optimale, on aurait besoin de 4,36 véhicules.

On peut reprendre l'analyse précédente en utilisant le rayon intérieur de l'anneau comme rayon extérieur de l'anneau suivant (vers le dépôt) et en prenant la densité de la zone 2. On en déduit le rayon intérieur et le nombre de véhicules requis dans la section 2 (voir figure 6.3).



NOMBRE DE VÉH. = 2,51

$r_{k-1} = 5.68$

FIGURE 6.3

On a procédé de la même façon pour Laval, la Rive-Sud, et en partant de la pointe ouest de l'île de Montréal jusqu'au dépôt. Les résultats pour chacune des sections sont présentés sur la figure (6.4).

Nous avons donc calculé pour chaque secteur le nombre de véhicules nécessaires et le nombre de points visités par chaque véhicule. Le planificateur peut ici se servir de son jugement et de son expérience pour séparer les sections en zones en se guidant sur le nombre de véhicules et le nombre de points par véhicule. Comme le nombre de véhicules par section n'est pas entier, il devra former certaines zones en regroupant des points de plus d'un secteur en tenant compte de la géographie.

6.2. Vers un système graphique d'aide à la planification des zones.

Le but de cette section est de présenter une esquisse d'un système informatique-graphique d'aide à la décision basé sur les résultats du chapitre précédent. Le système pourrait être particulièrement efficace lorsque les sections sont petites de sorte que l'on forme les zones affectées à chaque véhicule en assemblant un certains nombre de sections.

À partir d'une base de données contenant pour chaque section, sa surface, le nombre de points à visiter et la distance de son centre au dépôt, l'utilisateur choisit un certain nombre de sections contiguës. Le choix pourrait se faire directement sur une carte affichée à l'écran. L'ordinateur peut afficher au fur et à mesure de la sélection des sections, des informations sur le nombre de clients, la surface totale et le temps total de la tournée des points de la zone en construction. La distance au dépôt et la densité de la zone sont alors

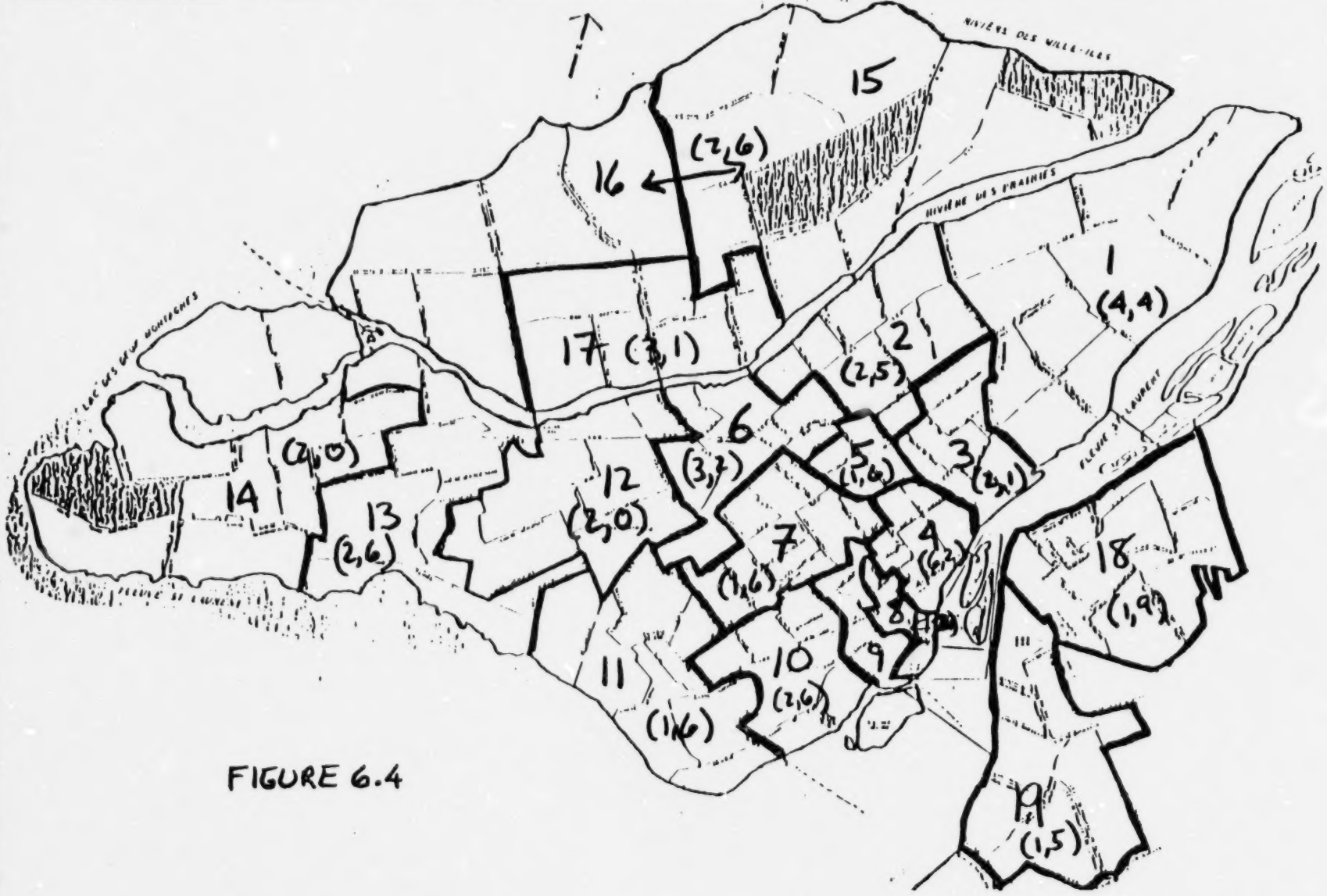

(NOMBRE DE VÉHICULES)
SECTIONS
15
16
(2,6)
17 (3,1)
1
(4,4)
2
(2,5)
6
(3,2)
5
(1,6)
3
(3,1)
14
(2,0)
13
(2,6)
12
(2,0)
7
(1,6)
4
(6,2)
18
(1,9)
11
(1,6)
10
(2,6)
9
8
(1,5)

FIGURE 6.4

calculées. À partir des équations développées au chapitre précédent, l'ordinateur peut calculer les dimensions idéales de la zone et faire apparaitre celle-ci à l'écran en superposé. L'utilisateur pourrait alors ajouter ou enlever des secteurs à son gré et vérifier immédiatement l'impact de ces changements sur le temps d'occupation du véhicule, le nombre de points à visiter et la surface couverte.

Il serait alors en mesure de trouver les meilleurs compromis possibles entre les zones idéales et les contraintes géographiques et humaines de tout ordre en connaissant les conséquences de ses choix i.e. en obtenant une évaluation à la fois quantitative et graphique de ceux-ci. On peut voir à la figure 6.5 une illustration de ce qui pourrait apparaître à l'écran.

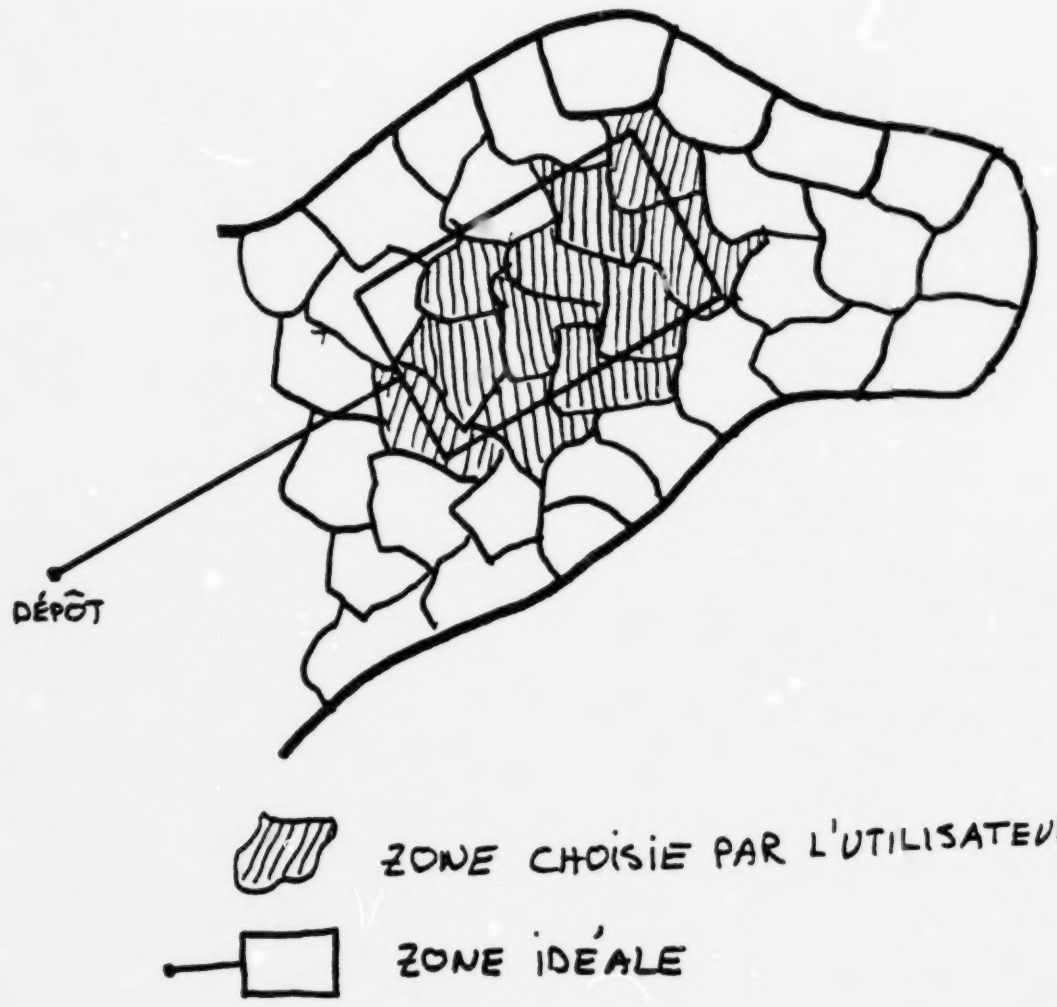


FIGURE 6.5

Chapitre 7

LE PROBLEME DU VOYAGEUR DE COMMERCE AVEC FENETRES-HORAIRE

Pour résoudre le problème de confection des tournées de véhicules, nous avons adopté une approche de regroupement préalable des points puis confection d'une tournée pour chacun des véhicules (clustering first, routing second). Cette approche est justifiée par la taille des problèmes à résoudre.

Au chapitre 5, nous avons proposé une méthode de planification des zones de livraison, chaque zone étant affectée à un seul véhicule; ceci correspond à la partie "clustering". Nous allons dans le chapitre 7 traiter du problème de la confection de l'itinéraire de chacun des véhicules i.e. traiter de la partie "routing". Le problème de la confection d'une tournée d'un seul véhicule est appelé problème du voyageur de commerce.

La tournée que l'on recherche doit tenir compte des contraintes d'horaire. On ne tient donc pas compte de ces contraintes au moment de la planification des zones (clustering), ce qui peut entrainer l'impossibilité de fabriquer la tournée dans certaines zones. On peut cependant contourner cette difficulté de plusieurs façons: on peut envisager l'intervention manuelle du répartiteur pour résoudre certains conflits en changeant l'affectation de quelques points à visiter, ou encore utiliser les techniques développées au chapitre 5 pour tenir compte de la variabilité de la demande i.e. réajuster la grandeur des zones (en modifiant la durée maximale (T)) ou permettre une

collaboration entre véhicules. Le modèle que nous proposons dans ce chapitre peut d'ailleurs s'appliquer à la confection de plusieurs tournées simultanément (si la taille du problème correspondant n'est pas trop grande). Nous allons cependant nous concentrer sur la confection de la tournée d'un seul véhicule.

Le problème du voyageur de commerce consiste à trouver sur un graphe un cycle hamiltonien (i.e. un cycle qui passe par chacun des noeuds une et une seule fois) de coût minimum. Lorsque chacun des noeuds doit être visité dans un intervalle de temps donné, le problème est appelé voyageur de commerce avec fenêtres-horaire. Le problème du voyageur de commerce avec ou sans fenêtres-horaire est NP-complet: il n'existe pas d'algorithme borné polynomialement pour le résoudre.

La grande majorité des méthodes exactes pour résoudre le problème du voyageur de commerce reposent sur une formulation du problème comme un programme linéaire en nombres entiers à partir de laquelle on tire une relaxation linéaire du problème i.e. une relaxation des contraintes d'intégralité des variables. Lawler, Lenstra, Rinnooy Kan et Shmoys[1985] présentent une revue d'ensemble fort complète des méthodes de résolution du problème du voyageur de commerce. La solution d'une relaxation linéaire procure une borne inférieure à la solution optimale et cette borne est ensuite utilisée dans une procédure d'énumération et d'évaluation progressive (Branch & Bound) ou dans une procédure d'adjonction de coupes pour obtenir l'optimum. D'où l'intérêt de trouver la formulation dont la relaxation linéaire fournira le meilleur ratio qualité/coût i.e la meilleure borne possible versus le coût de résolution.

Le problème du voyageur de commerce est à la base de nombreux problèmes de tournées et d'horaires de véhicules. Pour une revue complète de ces problèmes, on pourra consulter les articles de synthèse de Magnanti[1981], Bodin et al.[1983] et Laporte et Nobert[1987]. L'étude du problème du voyageur de commerce avec fenêtres-horaire est très récente. L'intérêt de ce problème tient au fait qu'il permet de modéliser de façon plus adéquate les problèmes réels qui comportent souvent des contraintes supplémentaires de durée et d'horaires. On trouvera dans Solomon et Desrosiers[1988] et Desrochers et al.[1988] des revues de littérature récentes sur les problèmes de tournées avec fenêtres-horaire.

L'objectif du présent chapitre est de présenter diverses formulations du problème du voyageur de commerce en programme linéaire en nombres entiers et de comparer la borne de leur relaxation linéaire, puis de présenter une nouvelle formulation qui se prête bien à la modélisation des fenêtres-horaire. La section 7.1 présente quelques formulations classiques ainsi que des formulations basées sur les multiflots et nous montrons que plusieurs formulations dont la relaxation linéaire contient $O(n^3)$ contraintes sont équivalentes. La section 7.2 présente une nouvelle formulation pour traiter le problème du voyageur de commerce avec fenêtres-horaire et certains problèmes dérivés de celui-ci.

7.1. Formulations du problème du voyageur de commerce.

7.1.1 Formulations classiques.

La formulation classique du problème du voyageur de commerce consiste à le modéliser comme un problème d'affectation (1-5) avec, en plus, des contraintes d'élimination de sous-cycles:

$$\text{Min } \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

$$\text{s.c.} \quad \sum_i x_{ij} = 1 \qquad j=1,\ldots,n \qquad (2)$$

$$\sum_j x_{ij} = 1 \qquad i=1,\ldots,n \qquad (3)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \qquad \text{pour tout } i,j \qquad (4)$$

$$x_{ij} \text{ entier} \qquad \text{pour tout } i,j \qquad (5)$$

+ contraintes d'élimination de sous-cycles

Le coefficient c_{ij} représente le coût (ou la distance) pour aller du noeud i au noeud j. On pose $c_{ii} = \infty$ pour tout i. La variable x_{ij} prend la valeur 1 si l'itinéraire emprunte l'arc (i,j) et 0 sinon. Les équations (2) et (3) forment les contraintes d'affectation et assurent que chaque noeud est visité une seule fois.

Dantzig, Fulkerson et Johnson[1954] ont utilisé cette formulation avec comme contraintes d'élimination de sous-cycles les contraintes suivantes:

$$\sum_{i \in Q} \sum_{j \in Q} x_{ij} \leq |Q| - 1 \text{ pour tout sous-ensemble non-vide } Q \subset \{2,3,\ldots n\} \qquad (6)$$

Cette formulation (1-6), notée D.F.J., utilise $O(n^2)$ variables binaires et $O(2^n)$ contraintes.

Miller, Tucker et Zemlin[1960] ont présenté une autre formulation reposant sur le modèle d'affectation mais qui utilise un nombre polynomial de contraintes d'élimination de sous-cycles grâce à l'emploi de variables continues. Ces contraintes sont:

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n-1 \quad \text{pour tout } j \neq 1 \text{ et } i \neq j \qquad (7)$$

Cette formulation requiert $O(n^2)$ variables binaires, $O(n)$ variables continues et $O(n^2)$ contraintes.

Enfin, Gavish et Graves[1978] ont proposé une formulation utilisant $O(n^2)$ variables binaires, $O(n^2)$ variables continues et $n^2 + 3n$ contraintes. Les contraintes d'élimination de sous-cycles sont données par:

$$\sum_j z_{ij} - \sum_{j \neq 1} z_{ji} = 1 \quad i=2,\ldots,n \qquad (8)$$

$$z_{ij} \leq (n-1)x_{ij} \quad i=2,\ldots,n \quad j=1,\ldots,n \qquad (9)$$

$$z_{ij} \geq 0 \quad \text{pour tout } i,j$$

L'équation (8) au noeud 1 se déduit des autres de sorte que (8) peut être réécrite, de façon équivalente en posant $z_{1j} = 0$, par:

$$\sum_j (z_{ij} - z_{ji}) = \begin{cases} -(n-1) & i=1 \\ 1 & i \neq 1 \end{cases} \qquad (8')$$

et cela correspond à un arbre de flot de marchandises des noeuds vers le dépôt.

En effet, pour chaque solution $\{x_{ij}\}$ du problème d'affectation, (8') et (9) forment les contraintes d'un problème de flot avec capacité. Il est à noter que les relaxations linéaires de ces deux versions de la formulation de Gavish et Graves sont équivalentes.

Représentons la valeur optimale des relaxations linéaires des formulation de D.F.J., M.T.Z. et G.G. par $v_{PL}(DFJ)$, $v_{PL}(MTZ)$ et $v_{PL}(GG)$ respectivement. Wong[1980] a démontré que

$$v_{PL}(MTZ) \leq v_{PL}(GG) \leq v_{PL}(DFJ)$$

et il a noté que la différence entre $v_{PL}(GG)$ et $v_{PL}(DFJ)$ pouvait être très grande. D'autre part, Held et Karp[1971] ont observé expérimentalement que, pour de nombreux problèmes, la solution de la relaxation linéaire de D.F.J. est très proche (à moins de 0,5%) de la solution optimale du problème du voyageur de commerce.

7.1.2 Formulations de multiflots.

Wong[1980] a présenté une formulation du problème du voyageur de commerce utilisant 2(n-1) flots $Y^k = (y^k_{ij})$ et $Z^k = (z^k_{ij})$:

(Wong) $\quad \text{Min } \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$

s.c. $\quad$ affectation (2) et (3)

$0 \le x_{ij} \le 1 \quad$ pour tout i,j

x_{ij} entier $\quad$ pour tout i,j

$$\sum_j (y^k_{ij} - y^k_{ji}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=1 \\ -1 & \text{si } i=k \\ 0 & \text{si } i \neq 1 \text{ et } k \end{cases} \qquad (10)$$

$k=2,\ldots,n$

$$\sum_j (z^k_{ij} - z^k_{ji}) = \begin{cases} -1 & \text{si } i=1 \\ 1 & \text{si } i=k \\ 0 & \text{si } i \neq 1 \text{ et } k \end{cases} \qquad (11)$$

$k=2,\ldots,n$

$y^k_{ij} \le x_{ij}$ et $z^k_{ij} \le x_{ij} \quad$ pour tout i,j,k $\qquad (12)$

$y^k_{ij} \ge 0$, $z^k_{ij} \ge 0 \quad$ pour tout i,j,k

Les contraintes (10) et (11) assurent qu'une unité de flot Y^k va du noeud 1 (la source du flot Y^k) au noeud k (le puits du flot Y^k) alors qu'une unité du flot Z^k va du noeud k au noeud 1. Ceci implique que le sous-graphe support du flot est fortement connexe i.e qu'il existe sur ce sous-graphe un chemin pour aller de n'importe quel noeud vers n'importe quel autre noeud (en passant par la source). Cette formularion requiert $O(n^2)$ variables binaires, $O(n^3)$ variables continues et $2(n^3 + n^2 + n)$ contraintes. Seules les variables x_{ij} sont soumises à l'intégralité car les variables y^k_{ij} et z^k_{ij} sont nécessairement entières lorsque les x_{ij} le sont puisque la matrice des flots Y^k et Z^k est totalement unimodulaire (les x_{ij} correspondent aux capacités sur les arcs).

Wong[1980] a démontré que

$$v_{PL}(\text{Wong}) = v_{PL}(\text{DFJ}) \qquad (13)$$

et qu'ainsi il est possible de remplacer un nombre exponentiel de contraintes d'élimination de sous-cycles par un nombre polynomial de contraintes (au prix d'un nombre additionnel de variables).

Claus[1984] présente une formulation équivalente en nombres entiers à celle de Wong, réduisant de moitié le nombre de variables en supprimant les variables z^k_{ij}. Nous avons évidemment

$$v_{PL}(\text{Claus}) \leq v_{PL}(\text{Wong}) \qquad (14)$$

puisque la formulation de Claus est une relaxation de celle de Wong. L'équivalence des formulations de Wong et de Claus est démontrée par le lemme suivant:

<u>Lemme 1</u>: $v_{PL}(\text{Wong}) \leq v_{PL}(\text{Claus})$

démonstration:

Soit une solution $X=(x_{ij})$ et $Y^k=(y^k_{ij})$ $k=2,\ldots,n$ satisfaisant la formulation de Claus. Puisque $y^k_{ij} \leq x_{ij}$, posons $z^k_{ij} = x_{ij} - y^k_{ij} \geq 0$. On a alors $z^k_{ij} \leq x_{ij}$ pour tout i,j et

$$\sum_j (y^k_{ij} - y^k_{ji}) = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ -1 & i = k \\ 0 & i \neq 1 \text{ et } k \end{cases}$$

En remplaçant par les z^k_{ij}, on obtient:

$$\sum_j ((x_{ij}-z^k_{ij}) - (x_{ji}-z^k_{ji})) = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ -1 & i = k \\ 0 & i \neq 1 \text{ et } k \end{cases}$$

Comme $\sum_j x_{ij} = \sum_j x_{ji} = 1$, alors

$$\sum_j (z^k_{ij} - z^k_{ji}) = \begin{cases} -1 & i = 1 \\ 1 & i = k \\ 0 & i \neq 1 \text{ et } k \end{cases}$$

On obtient ainsi une solution de la formulation de Wong de même coût. •

Loulou et Paskievici[1988] ont introduit une formulation qui remplace, pour chaque arc (i,j), les inéquations

$$y^k_{ij} \leq x_{ij} \text{ et } z^k_{ij} \leq x_{ij} \qquad (12)$$

par une seule contrainte plus restrictive

$$y^k_{ij} + z^k_{ij} = x_{ij} \quad \text{pour tout } i,j \qquad (15)$$

Nous pouvons considérer aussi une variante de cette formulation avec une contrainte moins restrictive:

$$y^k_{ij} + z^k_{ij} \leq x_{ij} \quad \text{pour tout } i,j \qquad (16)$$

Appelons (Loulou-) et (Loulou≤) les relaxations linéaires correspondant respectivement à (15) et (16). En utilisant des contraintes plus restrictives que celles de Wong, les formulations avec (15) ou (16) produisent apparemment une meilleure borne i.e.

$$v_{PL}(\text{Wong}) \leq v_{PL}(\text{Loulou}\leq) \leq v_{PL}(\text{Loulou-}) \qquad (17)$$

Nous allons démontrer par le lemme 2 et le théorème suivant que ces bornes sont équivalentes.

<u>Lemme 2</u> $\qquad v_{PL}(\text{Loulou-}) \leq v_{PL}(\text{DFJ})$

démonstration:

Soit $X = (x_{ij})$, une solution optimale de (1-6), la relaxation linéaire de D.F.J.

Pour chaque noeud k, les contraintes d'élimination de sous-cycles assurent qu'un flot d'au moins une unité traverse en direction de k chaque coupe entre le noeud 1 et le noeud k. Le théorème du "flot max./coupe min." nous assure qu'il existe un flot Y^k d'une unité du noeud 1 vers le noeud k et borné par le flot X:

$$\sum_j (y^k_{ij} - y^k_{ji}) = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ -1 & i = k \\ 0 & i \neq 1 \text{ et } k \end{cases}$$

$$y^k_{ij} \leq x_{ij} \qquad \text{pour tout i,j}$$

Le flot Y^k doit être sans boucle: on a donc

$$\sum_j y^k_{kj} = 0 \text{ et } \sum_j y^k_{j1} = 0.$$

Nous allons montrer qu'il existe un flot Z^k d'une unité du noeud k vers le noeud 1.

Posons $z^k_{ij} = x_{ij} - y^k_{ij}$ pour tout i,j

1) Soit i ($\neq$1 et $\neq$k) un noeud quelconque.

On a $\qquad \sum_j x_{ij} = \sum_j x_{ji}$ et $\sum_j y^k_{ij} = \sum_j y^k_{ji}$

$$\Rightarrow \quad \sum_j (x_{ij} - y^k_{ij}) = \sum_j (x_{ji} - y^k_{ji})$$

$$\Rightarrow \quad \sum_j z^k_{ij} = \sum_j z^k_{ji}$$

2) Au noeud k: $\sum_j x_{kj} = 1$ et $\sum_j y^k_{kj} = 0$

$$\Rightarrow \quad \sum_j (x_{kj} - y^k_{kj}) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \sum_j z^k_{kj} = 1$$

3) Au noeud 1: $\sum_j x_{j1} = 0$ et $\sum_j y^k_{j1} = 0$

$$\Rightarrow \quad \sum_j (x_{j1} - y^k_{j1}) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \sum_j z^k_{j1} = 1$$

1), 2) et 3) => Z^k est un flot de une unité de k vers 1.

Donc (X,Y,Z) est solution de Loulou- au même coût. •

<u>Théorème</u>: $v_{PL}(DFJ) = v_{PL}(Wong) = v_{PL}(Loulou\leq) = v_{PL}(Loulou\text{-}) = v_{PL}(Claus)$

démonstration:

Nous avons en appliquant successivement les résultats (13), lemme 1, (14), (17) et lemme 2 que

$v_{PL}(DFJ) = v_{PL}(Wong) \leq v_{PL}(Claus) \leq v_{PL}(Wong) \leq v_{PL}(Loulou\leq) = v_{PL}(Loulou\text{-})$

$\leq v_{PL}(DFJ)$, ce qui démontre le théorème. •

Ainsi, toutes les relaxations linéaires des formulations de multiflots considérées dans cette section procurent une borne identique à la relaxation linéaire de la formulation de Dantzig, Fulkerson et Johnson. Cependant, ces formulations ne peuvent servir à résoudre directement comme programme linéaire des problèmes de voyageur de commerce de taille respectable à cause du nombre élevé de contraintes [$O(n^3)$].

7.1.3 Formulations à deux flots.

Finke et al.[1984] ont proposé une formulation du problème du voyageur de commerce comme un problème de flot à 2 produits. On montre facilement que cette formulation est obtenue de la formulation de Loulou- en aggrégeant les flots Y^k et Z^k:

$$y_{ij} = \sum_k y^k_{ij} \text{ et } z_{ij} = \sum_k z^k_{ij}.$$

On considère alors que le voyageur de commerce quitte le noeud 1 avec n-1 unités du produit Y et aucune du produit Z. Il distribue une unité de Y et ramasse une unité de Z à chaque noeud de telle sorte que le voyageur a à tout moment un total de n-1 unités des deux produits. Le modèle s'écrit comme suit:

$$\text{Min } \sum_i \sum_j c_{ij}(y_{ij} + z_{ij})/d_1 \tag{18}$$

$$\sum_j (y_{ij} - y_{ji}) = \begin{cases} d_1 & \text{pour } i=1 \\ -d_i & \text{pour } i\neq 1 \end{cases} \tag{19}$$

$$\sum_j (z_{ij} - z_{ji}) = \begin{cases} -d_1 & \text{pour } i=1 \\ d_i & \text{pour } i\neq 1 \end{cases} \tag{20}$$

$$\sum_j (y_{ij} + z_{ij}) = d_1 \qquad \text{pour tout } i \tag{21}$$

$$y_{ij} + z_{ij} \in \{0, d_1\} \qquad \text{pour tout } i,j \tag{22}$$

$$y_{ij} \geq 0,\ z_{ij} \geq 0 \tag{23}$$

avec $d_i = 1$ pour $i \neq 1$ et $d_1 = d_2 + d_3 + \ldots + d_n = n-1$

Les contraintes (19), (20) et (21) définissent des flots Y, Z réalisables pour chacun des deux produits. Le flot Y correspondant aux unités distribuées et le flot Z aux unités ramassées, les d_i représentent la demande et l'offre au noeud i. Les contraintes (21) et (22) assurent qu'exactement un arc supportant un flot combiné de n-1 unités quitte chaque noeud. De plus, la structure d'offre et de demande implique qu'il existe un chemin de la source 1 vers chacun des noeuds j et un autre de chacun des noeuds j vers 1. Donc, le graphe support est fortement connexe comme dans le cas des formulations de multiflots.

La relaxation linéaire du problème du voyageur de commerce est obtenue en remplaçant les contraintes (22) par $y_{ij} + z_{ij} \leq d_1$ pour tout i,j. Ces contraintes étant redondantes par rapport aux contraintes (21), elles peuvent être éliminées de la relaxation linéaire. Le programme linéaire correspondant contient donc 3n contraintes alors que la formulation en nombres entiers contient $O(n^2)$ contraintes de plus.

Dans la formulation précédente, on a posé $d_i = 1$ pour $i \neq 1$. On peut facilement généraliser (Lucena 1986) à d'autres d_i pour tenir compte d'une demande différente à chaque noeud. On pose alors $d_1 = \sum_{i \neq 1} d_i$. On peut voir cette généralisation comme une formulation équivalente en nombres entiers correspondant à une pondération différente des noeuds lors de l'aggrégation des flots Y^k et Z^k.

Lucena[1986] a aussi présenté une extension de la formulation de Finke et al. pour le problème du voyageur de commerce multiple (ou m-voyageurs de commerce): les contraintes (21) sont remplacées par

$$\sum_j (y_{1j} + z_{1j}) = d_1 \qquad (24)$$

$$\sum_j (y_{ij} + z_{ij}) = d_i \qquad i = 2,\ldots,n \qquad (25)$$

et $d_1 = n - m$

La contrainte (24) force l'utilisation de m voyageurs. La relaxation linéaire de cette formulation contient aussi 3n contraintes. Cette dernière formulation s'applique aussi au problème de tournées de véhicules (Vehicle Routing Problem): il suffit de remplacer dans les équations précédentes d_1 par la capacité de chacun des véhicules et de prendre comme d_i la demande à chaque noeud. On peut de la même façon étendre la formulation au problème de VRP avec des capacités différentes (Lucena 1986) et tenir compte de contraintes de priorité i.e. lorsqu'on doit visiter certains noeuds avant d'autres (Finke et Kusiak 1985).

Pour le problème du voyageur de commerce, Finke et al.[1984] ont démontré que la borne obtenue par cette relaxation est supérieure ou égale à la solution du problème d'affectation et ils ont donné un exemple où leur borne est strictement meilleure que celle du problème d'affectation correspondant. De plus, Loulou et Paskievici[1988] ont trouvé un exemple pour lequel la borne de Finke est strictement plus petite que la borne de Wong. On en conclut donc que:

$$v_{PL}(\text{affectation}) \leq v_{PL}(\text{Finke}) \leq v_{PL}(\text{Wong})$$

Il est à noter que l'on peut réécrire le modèle de Finke et al.(lorsque $d_i = 1$ pour tout $i \neq 1$) en liant les variables y_{ij} et z_{ij} avec les variables d'affectation x_{ij}:

$$\text{Min } \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

s.c. (19), (20), (21), (23) et

$$y_{ij} + z_{ij} = (n-1)x_{ij} \qquad \text{pour tout } i,j$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ou } 1. \qquad \text{pour tout } i,j$$

On peut aussi éliminer le flot Y et présenter un modèle relaxé sous forme de modèle d'affectation combiné à un modèle de flot (à un produit). Ce modèle correspond alors à la formulation de Gavish et Graves (1-5), (8') et (9') présentée à la section 7.1.1. Nous démontrons par le théorème suivant l'équivalence entre la relaxation linéaire de la formulation de Gavish et Graves (avec $O(n^2)$ contraintes et $O(n^2)$ variables) et celle de la formulation de Finke et al. (avec $O(n)$ contraintes seulement et $O(n^2)$ variables).

Théorème: v_{PL}(Finke et al.) = v_{PL}(Gavish et Graves)

démonstration:

A) Soit (y_{ij}, z_{ij}) une solution réalisable de (18-21) et (23).

Posons $x_{ij} = (y_{ij} + z_{ij})/(n-1)$.

1) $\sum_i \sum_j c_{ij}(y_{ij} + z_{ij})/(n-1) = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$

2) $\sum_j (y_{ij} - y_{ji}) = -1$ et $\sum_j (z_{ij} - z_{ji}) = 1 \Rightarrow \sum_j (y_{ij}+z_{ij}) - \sum_j (y_{ji}+z_{ji}) = 0$

$$\Rightarrow \sum_j (x_{ij} - x_{ji}) = 0$$

3) $\sum_j (y_{ij} + z_{ij}) = (n-1) \quad \Rightarrow \quad \sum_j (n-1)x_{ij} = (n-1) \quad \Rightarrow \quad \sum_j x_{ij} = 1$

4) $y_{ij} \geq 0$ et $y_{ij} = x_{ij}(n-1) - z_{ij} \Rightarrow x_{ij}(n-1) - z_{ij} \geq 0 \Rightarrow z_{ij} \leq x_{ij}(n-1)$ Ainsi, on obtient une solution de la relaxation linéaire de la formulation de Gavish et Graves au même coût.

B) Soit (x_{ij}, z_{ij}) une solution réalisable de la relaxation linéaire de Gavish et Graves.

Posons $y_{ij} = x_{ij}(n-1) - z_{ij}$. On a $x_{ij} = (y_{ij} + z_{ij})/(n-1)$.

1) $\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} = \sum_i \sum_j c_{ij}(y_{ij} + z_{ij})/(n-1)$

2) $\sum_j (y_{ij} - y_{ji}) = \sum_j (((n-1)x_{ij} - z_{ij}) - ((n-1)x_{ji} - z_{ji}))$

$$= (n-1)\sum_j (x_{ij} - x_{ji}) - \sum_j (z_{ij} - z_{ji}) = 0 - \sum_j (z_{ij} - z_{ji}) = \begin{cases} n-1 & \text{si } i=1 \\ -1 & \text{si } i \neq 1 \end{cases}$$

3) $\sum_j (y_{ij} + z_{ij}) = \sum_j x_{ij}(n-1) = (n-1)\sum_j x_{ij} = (n-1)$ pour tout i

4) comme $z_{ij} \leq (n-1)x_{ij}$ alors $y_{ij} \geq 0$

Alors on obtient une solution (y_{ij}, z_{ij}) de la relaxation linéaire de Finke et al. au même coût. •

La formulation de Finke est d'autant plus intéressante qu'elle permet de modéliser des problèmes du voyageur de commerce avec des contraintes technologiques supplémentaires. Par exemple, Finke et Kusiak[1985] ont utilisé ce modèle dans le domaine des ateliers flexibles.

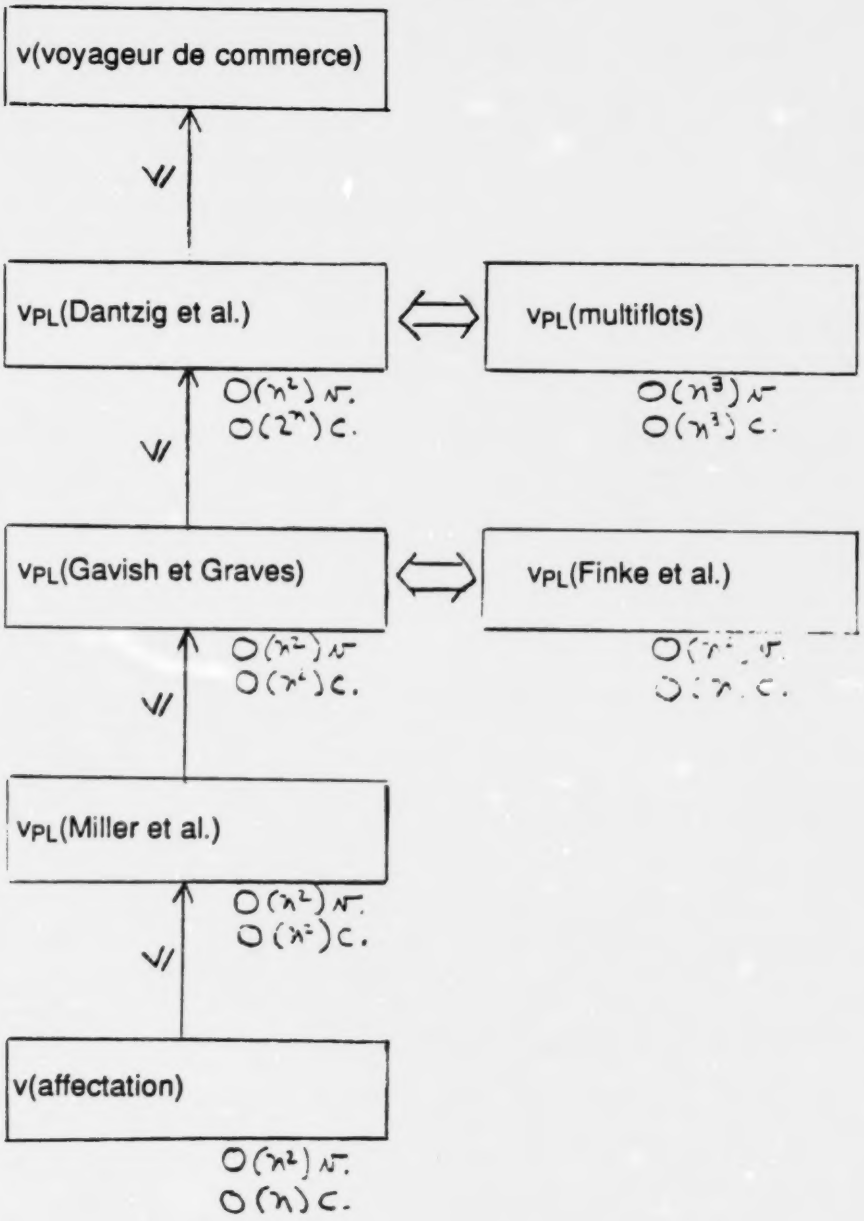
7.1.4 Conclusion.

Nous avons démontré l'équivalence de la relaxation linéaire de plusieurs formulations de multiflots pour le problème du voyageur de commerce. Nous avons aussi démontré l'équivalence de la relaxation linéaire des formulations de multiflots qui contiennent $O(n^2)$ contraintes avec celle de la formulation de Dantzig et al.[1956] qui contient $O(2^n)$ contraintes. L'équivalence de toutes ces formulations permet donc de bénéficier des résultats expérimentaux obtenus par tous les auteurs. Or Held et Karp [1971] ont trouvé expérimentalement que la borne de la formulation de Dantzig et al. était à 0,5% de la solution optimale du problème du voyageur de commerce. Ceci permet d'utiliser la formulation la plus facile à résoudre suivant le type d'approche puisque les bornes correspondantes sont toutes équivalentes.

Nous avons montré que les 2 flots de la formulation de Finke et al. pouvaient être obtenus par l'aggrégation des flots d'une des formulations de multiflots. Enfin, nous avons montré l'équivalence des relaxations linéaires de la formulation de Gavish et Graves[1978] contenant $O(n^2)$ contraintes et de celle de Finke et al.[1984] contenant 3n contraintes.

L'expérimentation numérique de Gavish et Srikanth[1986] sur la relaxation lagrangienne de la formulation de Gavish et Graves nous donne des indications sur ce qui pourrait être fait avec certaines relaxations lagrangiennes de la formulation de Finke et al. et peut nous renseigner sur la qualité éventuelle de la borne.

L'ensemble de ces résultats sur les bornes des relaxations linéaires peuvent être résumés par le tableau suivant.



valeur de bornes

7.2. Une nouvelle formulation à deux flots pour le problème du voyageur de commerce.

Nous présentons dans cette section une nouvelle formulation à deux flots pour le problème du voyageur de commerce. Cette formulation utilise des flots complémentaires qui correspondent l'un, à la ressource que l'on distribue (offre) à chaque noeud et l'autre, à la ressource (demande) que l'on ramasse à chaque noeud de telle façon que le total des deux flots à tout moment est constant et égal à la quantité de ressource à distribuer au départ. La ressource peut correspondre par exemple au temps total d'une journée de travail, alors que sur les arcs sont notés les temps de déplacement entre les noeuds.

Dans la formulation de Finke et al.[1983], l'offre et la demande à chaque noeud sont égales à une seule unité de la ressource: $d_i = 1$ pour tout $i \neq 1$. Dans notre modèle, l'offre et la demande à chaque noeud égalent la quantité de ressource consommée sur l'arc entrant. Elles sont exprimées par les équations suivantes:

$$d_i = \sum_j r_{ji}(y_{ji} + z_{ji})/R \qquad i \neq 1$$

où y_{ji} et z_{ji} représentent les 2 flots utilisés, r_{ji} la quantité de ressource utilisée sur l'arc (j,i) et R la quantité totale de ressource disponible au départ. Lorsque la solution est entière, $(y_{ji} + z_{ji})/R = 0$ ou 1 pour tout arc (j,i). La demande et l'offre au noeud i dépendent donc de la quantité de ressource r_{ji} consommée sur le seul arc entrant.

7.2.1 Le modèle.

Soit R la quantité totale de la ressource disponible au départ, et pour i,j=1,2,...,n soit r_{ij} la quantité de ressource nécessaire pour parcourir l'arc (i,j) et c_{ij} le coût correspondant. Sur l'itinéraire utilisé, le flot Y = (y_{ij}) correspond à la quantité de ressource encore disponible et le flot Z = (z_{ij}) cumule la quantité de ressource utilisée.

Le modèle s'écrit:

$$\text{Min} \quad \sum_i \sum_j c_{ij}(y_{ij} + z_{ij})/R \tag{26}$$

$$\sum_j (y_{ij} - y_{ji}) = \begin{cases} \sum_{k\neq 1} \sum_j r_{jk}(y_{jk} + z_{jk})/R & \text{pour } i=1 \\ -\sum_j r_{ji}(y_{ji} + z_{ji})/R & \text{pour } i\neq 1 \end{cases} \tag{27}$$

$$\sum_j (z_{ij} - z_{ji}) = \begin{cases} -\sum_{k\neq 1} \sum_j r_{jk}(y_{jk} + z_{jk})/R & \text{pour } i=1 \\ \sum_j r_{ji}(y_{ji} + z_{ji})/R & \text{pour } i\neq 1 \end{cases} \tag{28}$$

$$\sum_j (y_{ij} + z_{ij}) = R \qquad \text{pour tout } i \tag{29}$$

$$y_{ij} + z_{ij} \in \{0, R\} \qquad \text{pour tout } i,j \tag{30}$$

$$y_{ij} \geq 0,\ z_{ij} \geq 0 \qquad \text{pour tout } i,j \tag{31}$$

Les contraintes (27) et (28) assurent la conservation de flot. Pour i≠1, le flot qui sort du noeud i moins le flot qui entre égale la demande ou l'offre en ce noeud, qui est égale à la quantité de ressource consommée sur l'arc entrant. Pour le noeud 1, les équations de conservation de flot sont redondantes; elles sont obtenues par la somme des équations (27) ou (28) sur i=2,...,n; ainsi d_1 =

$\sum_{i \neq 1} d_i$. Les contraintes (29) et (30) impliquent qu'un seul arc, sur lequel passe un flot combiné de R unités, est utilisé à partir de chacun des noeuds.

Toute solution aux contraintes (27-31) est un cycle hamiltonien en autant que la valeur de R soit suffisamment grande. La quantité de ressource doit permettre de parcourir le cycle optimal du voyageur de commerce i.e.

$$R \geq \sum_i \sum_j r_{ij}(y_{ij}^* + z_{ij}^*)/R = R^* \qquad (32)$$

Si on pose $R = R^*$, certains cycles hamiltoniens, qui consomment une quantité supplémentaire de ressource, peuvent être éliminés. Par contre, si on pose $R < R^*$, il peut encore exister des cycles hamiltoniens, mais de coût supérieur. La solution optimale étant inconnue, pour R fixé, on peut ajouter la contrainte

$$R \geq \sum_i \sum_j r_{ij}(y_{ij} + z_{ij})/R \qquad (33)$$

La phase 1 du simplexe permet alors de déterminer si la relaxation linéaire du problème admet au moins une solution fractionnaire, ce qui ne garantit pas nécessairement une solution entière.

La relaxation linéaire de cette formulation est obtenue en remplaçant les contraintes (30) par les contraintes

$$y_{ij} + z_{ij} \leq R \quad \text{pour tout } i,j$$

qui, étant redondantes par rapport aux contraintes (29), peuvent être éliminées. La relaxation linéaire contient donc 3n contraintes et $O(n^2)$ variables.

L'intérêt de notre formulation réside dans le fait qu'elle est très appropriée pour modéliser les problèmes de tournées de véhicules sous des contraintes d'horaire. Il suffit d'utiliser comme ressource le temps.

7.2.2 Propriétés de la relaxation linéaire.

Si l'on pose $(Y,Z) = (y_{ij}, z_{ij})$, le problème précédent (26-31,33) peut s'écrire sous la forme condensée suivante, pour R fixé:

$$\text{Min } v(Y,Z,R)$$

$$\text{s.c} \quad (Y,Z) \in P(R)$$

$$Y + Z \in \{0, R\}$$

P(R) correspond au polyèdre défini par les contraintes (27,28,29,31,33). Pour R suffisamment grand, on notera la longueur de la tournée optimale du voyageur de commerce par v(voyageur de commerce) et la valeur optimale de la relaxation linéaire du problème précédent par $v^*_{PL}(R)$. On a donc

$$v^*_{PL}(R) \leq v(\text{voyageur de commerce}).$$

propriété 1: Si $P(R) \neq \emptyset$, alors $v^*_{PL}(R) \geq v(\text{affectation})$

démonstration:

Si l'on définit les variables x_{ij} par

$$x_{ij} = (y_{ij} + z_{ij})/R, \qquad (34)$$

on peut facilement montrer que les variables x_{ij} satisfont les contraintes d'affectation:

$$\sum_j x_{ij} = \sum_j x_{ji} = 1 \qquad \text{pour tout i} \qquad (35)$$

•

<u>propriété 2</u>: Si $R_1 \leq R_2$ et $P(R_1) \neq \emptyset$, alors $P(R_2) \neq \emptyset$ et $v^*_{PL}(R_1) \geq v^*_{PL}(R_2)$.

démonstration:

Soit $\Delta R = R_2 - R_1$ et (Y^1, Z^1) une solution du polyèdre $P(R_1)$.

Nous allons démontrer qu'il existe une solution (Y^2, Z^2) de $P(R_2)$ de même coût i.e. avec $v(Y^1, Z^1, R_1) = v(Y^2, Z^2, R_2)$.

Construisons la solution (Y^2, Z^2) par:

$$y^2_{ij} = y^1_{ij} + (\Delta R)x^1_{ij}$$

$$z^2_{ij} = z^1_{ij}$$

où, par (34)

$$x^1_{ij} = (y^1_{ij} + z^1_{ij})/R_1 \text{ et } x^2_{ij} = (y^2_{ij} + z^2_{ij})/R_2.$$

1) $x^2_{ij} = (y^2_{ij} + z^2_{ij})/R_2 = [y^1_{ij} + (\Delta R)x^1_{ij} + z^1_{ij}]/(R_1 + \Delta R)$

$= [R_1 x^1_{ij} + (\Delta R)x^1_{ij}]/(R_1 + \Delta R) = x^1_{ij}$. On note donc x^1_{ij} et x^2_{ij} par x_{ij} et les deux fonctions économiques peuvent être écrites $\sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij}$ et sont donc égales.

2) Vérifions que les équations de $P(R_2)$ sont satisfaites.

Par (35), on a

$$\sum_j x^1_{ij} = \sum_j x^1_{ji} = 1 \text{ et } \sum_j x^2_{ij} = \sum_j x^2_{ji} = 1$$

d'où $\sum_j (y^2_{ij} - y^2_{ji}) = \sum_j (y^1_{ij} + (\Delta R)x_{ij} - y^1_{ji} - (\Delta R)x_{ji})$ ·

$$= \sum_j (y^1_{ij} - y^1_{ji}) + (\Delta R)\sum_j (x_{ij} - x_{ji})$$

$$= \sum_j (y^1_{ij} - y^1_{ji}) = -\sum_j r_{ji}x_{ji}$$

L'équation (27) est donc satisfaite.

$\sum_j (z^2_{ij} - z^2_{ji}) = \sum_j (z^1_{ij} - z^1_{ji}) = \sum_j r_{ji}x_{ji}$.

L'équation (28) est inchangée, et donc satisfaite.

$\sum_j (y^2_{ij} + z^2_{ji}) = \sum_j (y^1_{ij} + (\Delta R)x_{ij} + z^1_{ij}) = R_1 + (\Delta R)\sum_j x_{ij} = R_1 + \Delta R = R_2$.

L'équation (29) est donc satisfaite.

Et finalement, l'équation (33) est satisfaite puisque

$$\sum_i\sum_j r_{ij}(y^2_{ij} + z^2_{ij})/R_2 = \sum_i\sum_j r_{ij}(y^1_{ij} + z^1_{ij})/R_1 \leq R_1 \leq R_2.$$ •

Nous allons maintenant nous restreindre au cas où la ressource utilisée est le temps et où le coût de parcours d'un arc (i,j) est égal au temps de parcours t_{ij}. On pose alors dans le modèle précédent, $r_{ij} = c_{ij} = t_{ij}$ et $R = T$ la quantité totale de ressource (le temps).

<u>propriété 3</u>: Si $P(T) \neq \emptyset$, alors $v^*_{PL}(T) \leq T$.

démonstration:

Avec $c_{ij} = r_{ij} = t_{ij}$, la relaxation linéaire contient explicitement la relation (33) qui correspond à cette propriété. •

Soit $\hat{T}$, le plus petit T pour lequel il existe une solution réalisable à la relaxation linéaire du problème. On a

$$\hat{T} = \min\{ T \mid P(T) \neq \emptyset \}.$$

Par la propriété 2, on déduit que

$$v^*_{PL}(\hat{T}) \geq v^*_{PL}(T) \quad \text{pour } T \geq \hat{T}$$

et que $v^*_{PL}(\hat{T})$ constitue ainsi la meilleure borne inférieure obtenue par la relaxation linéaire du problème. Un résultat beaucoup plus intéressant est celui énoncé à la propriété suivante:

<u>propriété 4</u>: $\hat{T}$ est une borne inférieure au problème du voyageur de commerce: $\hat{T} \leq$ v(voyageur de commerce)

démonstration:

$\hat{T}$ est le plus petit T pour lequel $P(T) \neq \emptyset$. Supposons que, contrairement au résultat 4, $\hat{T}$ > v(voyageur de commerce). Il suffit de prendre T = v(voyageur de commerce) et on a un T pour lequel il existe une solution réalisable. Ce qui démontre la propriété par contradiction. •

Il faut noter que pour trouver $\hat{T}$, il n'est pas nécessaire que l'on trouve la solution optimale $v^*_{PL}(\hat{T})$.

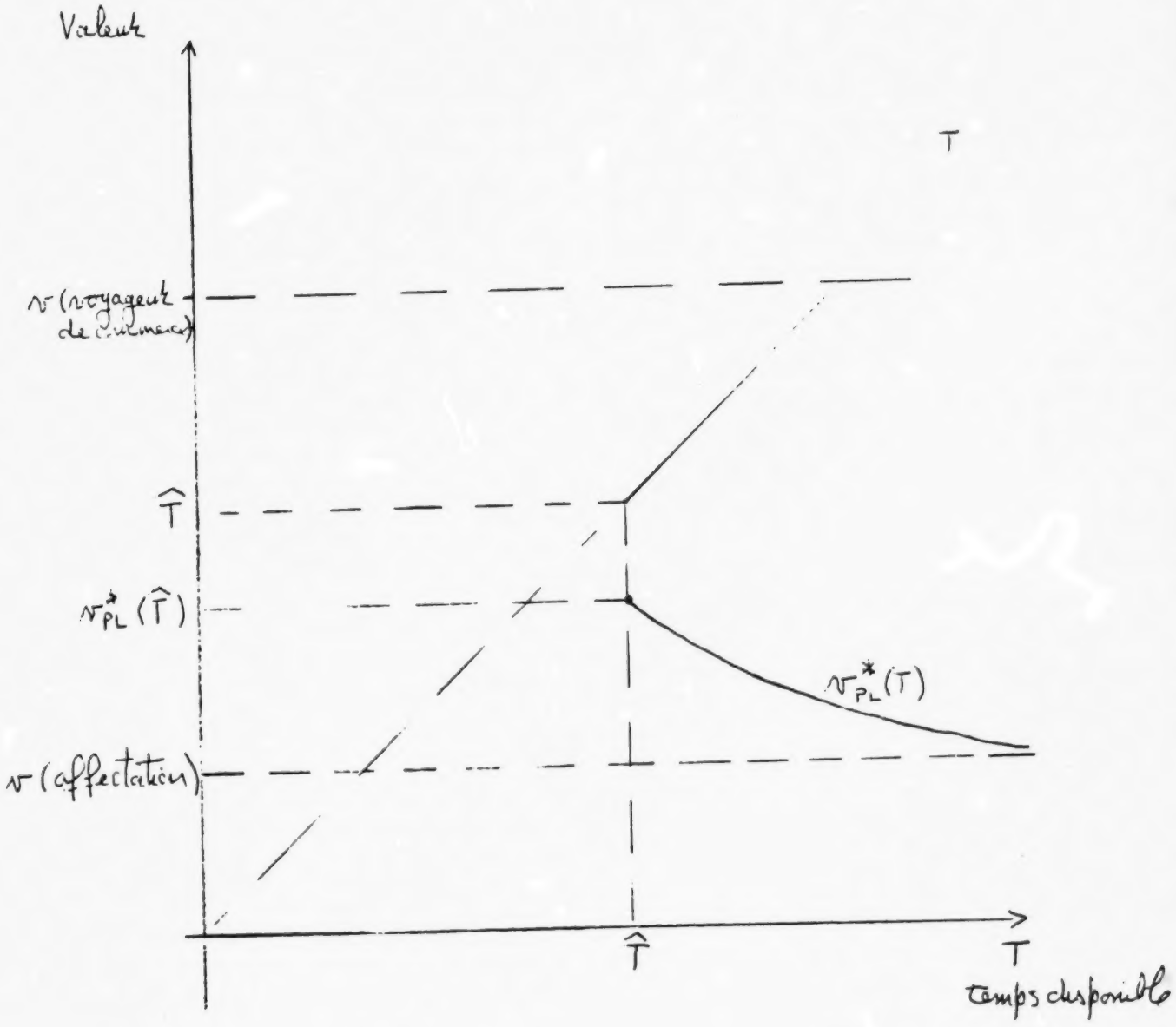
Le résultat 4 et la définition de $\hat{T}$ conduisent à la méthode suivante pour trouver une borne inférieure au problème du voyageur de commerce:

trouver, par bissection, le plus petit T pour lequel il existe une solution réalisable au problème (26-31,33) i.e pour lequel P(T) est non-vide.

Les propriétés 1 à 4 sont illustrées sur le graphique suivant. On voit d'une part que la valeur optimale de la relaxation linéaire ($v^*_{PL}(T)$), qui est toujours supérieure à la borne du problème d'affectation, croît à mesure que T, la durée maximale , décroît. D'autre part, $v^*_{PL}(T)$ est toujours inférieure ou égale à T. Finalement, on illustre le fait que $\hat{T}$, qui est le plus petit T pour lequel il existe une solution réalisable, est une borne du problème du voyageur de commerce ($v^*_{PL}(\hat{T}) \leq$ v(voyageur de commerce)).

Valeur de la borne obtenue par la relaxation linéaire

de la formulation à 2 flots lorsque la ressource utilisée est le temps.



7.2.3 Extension aux problèmes avec fenêtres-horaire.

La formulation que nous avons introduite à la section 7.2.1 est particulièrement appropriée pour tenir compte de contraintes temporelles. La ressource considérée est alors le temps disponible, ce qui peut par exemple correspondre à une journée de travail d'un chauffeur.

On appelle fenêtre-horaire l'intervalle de temps durant lequel un noeud doit être visité. Les contraintes spécifiant les fenêtres-horaire pour la visite de chacun des noeuds peuvent s'exprimer aisément comme des contraintes sur le flot Z: comme celui-ci tient compte du temps écoulé sur l'itinéraire emprunté du dépôt jusqu'à un noeud quelconque, il suffit de placer des contraintes sur la quantité de flot Z à la sortie de chaque noeud.

7.2.3.1 Le problème du voyageur de commerce avec fenêtres-horaire.

Le problème du voyageur de commerce avec fenêtres-horaire peut être exprimé par le modèle suivant:

$$\text{Min} \quad \sum_i \sum_j c_{ij}(y_{ij} + z_{ij})/T \tag{35}$$

$$\sum_j (y_{ij} - y_{ji}) \begin{cases} = \sum_{k\neq 1} w_k + \sum_{k\neq 1} \sum_j t_{jk}(y_{jk} + z_{jk})/T & i=1 \\ = - w_i - \sum_j t_{ji}(y_{ji} + z_{ji})/T & i\neq 1 \end{cases} \tag{36}$$

$$\sum_j (z_{ij} - z_{ji}) \begin{cases} = - \sum_{k\neq 1} w_k - \sum_{k\neq 1} \sum_j t_{jk}(y_{jk} + z_{jk})/T & i=1 \\ = w_i + \sum_j t_{ji}(y_{ji} + z_{ji})/T & i\neq 1 \end{cases} \tag{37}$$

$$\sum_j (y_{ij} + z_{ij}) = T \qquad \text{pour tout } i \qquad (38)$$

$$y_{ij} + z_{ij} \in \{0, T\} \qquad \text{pour tout } i,j \qquad (39)$$

$$y_{ij} \geq 0,\ z_{ij} \geq 0,\ w_i \geq 0 \qquad \text{pour tout } i,j \qquad (40)$$

$$a_i \leq \sum_j z_{ij} \leq b_i \qquad \text{pour tout } i \qquad (41)$$

$$T \geq \sum_i \sum_j t_{ij}(y_{ij} + z_{ij})/T + \sum_{k \neq 1} w_k \qquad (42)$$

Ce modèle correspond à celui introduit à la section 7.2.1 avec en plus les contraintes (41) qui sont les contraintes de fenêtres-horaire. Les variables w_i indiquent le temps d'attente au noeud i. Ce temps peut être nécessaire pour satisfaire la bornew inférieure d'une fenêtre-horaire. L'offre et la demande à chaque noeud sont alors égales au temps pour parcourir l'arc entrant plus le temps d'attente i.e. le q_i à chaque noeud est remplacée par $q_i + w_i$.

En additionnant les contraintes (36) et (37) pour chaque i, on obtient

$$\sum_j (y_{ij} + z_{ij}) = \sum_j (y_{ji} + z_{ji}) \quad \text{pour tout } i \qquad (36')$$

ce qui correspond à la conservation de flot pour Y + Z. En combinant ces équations avec les contraintes (38), on obtient une structure de problème d'affectation où les $(y_{ij} + z_{ij})/T$ jouent le rôle des variables d'affectation x_{ij}. En remplaçant les contraintes (36) par (36'), on peut réécrire le modèle avec des inégalités en (37), éliminant ainsi les variables d'attente w_i:

$$\text{Min } \sum_i \sum_j c_{ij}(y_{ij} + z_{ij})/T \qquad (35)$$

$$\sum_j (y_{ij} + z_{ij}) = \sum_j (y_{ji} + z_{ji}) \qquad (36')$$

$$\sum_j (z_{ij} - z_{ji}) \begin{cases} \leq -\sum_{k\neq 1}\sum_j t_{jk}(y_{jk} + z_{jk})/T & i=1 \\ \geq \sum_j t_{ji}(y_{ji} + z_{ji})/T & i\neq 1 \end{cases} \qquad (37')$$

$$\sum_j (y_{ij} + z_{ij}) = T \qquad \text{pour tout } i \qquad (38)$$

$$y_{ij} + z_{ij} \in \{0, T\} \qquad \text{pour tout } i,j \qquad (39)$$

$$y_{ij} \geq 0,\ z_{ij} \geq 0 \qquad \text{pour tout } i,j \qquad (40')$$

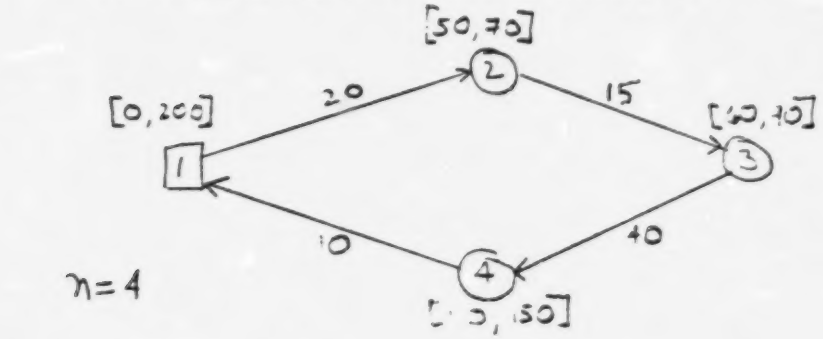
$$a_i \leq \sum_j z_{ij} \leq b_i \qquad \text{pour tout } i \qquad (41)$$

$$T \geq \sum_i\sum_j t_{ij}(y_{ij} + z_{ij})/T \qquad (42')$$

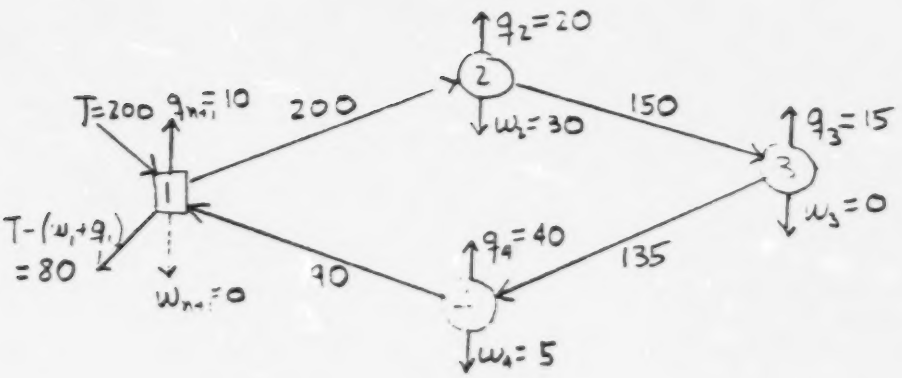
La formulation précédente permet de tenir compte de la durée totale de la tournée du voyageur de commerce simplement par le paramètre T. Une autre façon serait de dédoubler le dépôt et d'imposer une fenêtre-horaire sur le dépôt-retour. Ceci permet aussi de modéliser le cas où le retour est souhaité dans un intervalle de temps précis. D'ailleurs la relation (42) (ou 42') correspond à l'utilisation d'un noeud supplémentaire. Elle assure comme précédemment que le paramètre T est suffisamment grand pour inclure la solution du problème du voyageur de commerce.

La relaxation linéaire de cette formulation exclut les contraintes (39) et utilise $O(n^2)$ variables et 4n contraintes incluant les contraintes de fenêtres-horaire.

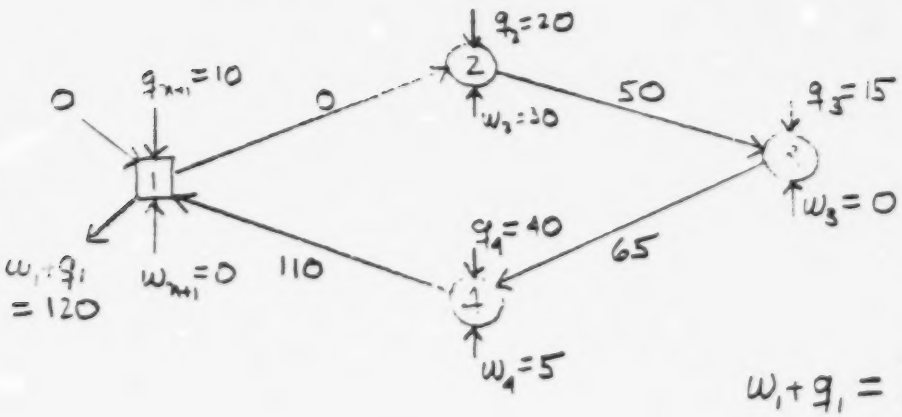
Nous illustrons sur le graphique suivant la nécessité d'utiliser les variables w_i ou les contraintes d'inégalités pour permettre l'attente des véhicules, de façon à éventuellement respecter une fenêtre-horaire.



FENÊTRES-HORAIRES = TEMPS DE PARCOURS PLUS TÔT



FLOT Y



FLOT Z

$$w_1 + q_1 = \sum_{i \neq 1} (w_i + q_i)$$

Sur le graphique précédent, q_{n+1} représente la durée pour parcourir le dernier arc (celui qui revient au dépôt) et on a $w_1 + q_1 = \sum_{i \neq 1}(w_i + q_i)$. On peut constater la nécessité d'attendre 30 unités de temps avant d'arriver au noeud 2 de façon à respecter la fenêtre-horaire.

7.2.3.2. Propriétés de la formulation du problème de voyageur de commerce avec fenêtres-horaire.

La présente section vise d'une part à établir quelques propriétés de la formulation du problème de voyageur de commerce avec fenêtres-horaire.

La relaxation linéaire de la formulation (35-42) est obtenue en remplaçant les contraintes (39) par les contraintes

$$y_{ij} + z_{ij} \leq T.$$

Ces dernières contraintes peuvent être éliminées de la relaxation linéaire puisqu'elles sont redondantes avec les contraintes (38). La relaxation linéaire est donc composée de la fonction objective (35) et des contraintes (36 à 38) et (40 à 42).

Dans la suite, nous appellerons F un ensemble de fenêtres-horaire (une fenêtre par noeud) sur les noeuds. $F = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ où $F_i = [a_i, b_i]$ est l'intervalle (ou la fenêtre-horaire) correspondant au noeud i.

Soient $F^1 = \{F^1_1, F^1_2, \ldots, F^1_n\}$ et $F^2 = \{F^2_1, F^2_2, \ldots, F^2_n\}$ deux ensembles de fenêtres-horaire, nous définissons $F^1 \leq F^2$ si $F^1_i \quad F^2_i$ i.e si $a^2_i \leq a^1_i \leq b^1_i \leq b^2_i$ pour chaque noeud i.

Nous appellerons P(F,T) le polyèdre des solutions satisfaisant les contraintes (36 à 38) et (40 à 42) avec l'ensemble F des contraintes de fenêtres-horaire. Nous appelons $\hat{T}_{F1}$ et $\hat{T}_{F2}$ les plus petits T pour lesquels il existe une solution réalisable en présence des contraintes d'horaire correspondant respectivement aux ensembles de fenêtres-horaire F^1 et F^2.

propriété 5: Si $F^1 \leq F^2$ alors $\hat{T}_{F1} \geq \hat{T}_{F2}$

démonstration:

Soit $(Y^1, Z^1) = (y^1_{ij}, z^1_{ij})$ une solution réalisable pour $P(F^1, \hat{T}_{F1})$.

1) On a donc $a^1_i \leq \sum_j z^1_{ij} \leq b^1_i$ ((41) satisfaites pour F^1). Or $F^1 \leq F^2$ i.e. $a^2_i \leq a^1_i$ et $b^1_i \leq b^2_i$ => $a^2_i \leq \sum_j z^1_{ij} \leq b^2_i$ ((41) satisfaites pour F^2).

2) Toutes les autres contraintes étant identiques pour F^1 et F^2, (Y_1, Z_1) est réalisable pour $P(F_2, \hat{T}_{F1})$.

Alors $\hat{T}_{F1} \geq \hat{T}_{F2}$. •

Appelons $v^*_{PL}(F,T)$ la solution optimale de la relaxation linéaire précédente en présence des fenêtres-horaire F.

propriété 6: Si $F^1 \leq F^2$ et $P(F^1,T) \neq \emptyset$, alors $v^*_{PL}(F^1,T) \geq v^*_{PL}(F^2,T)$

démonstration:

Comme $F^1 \leq F^2$, $P(F^2,T)$ est une relaxation de $P(F^1,T)$. •

propriété 7: Si $T \geq \hat{T}$ alors $v^*_{PL}(F,T) \leq v^*_{PL}(F,\hat{T})$

démonstration:

1) Les contraintes de fenêtres-horaire sont les mêmes pour T ou $\hat{T}$.

2) Il suffit de démontrer que toute solution du problème P(F,T) est solution au même coût du problème $P(F,\hat{T})$. Ce résultat n'est autre que la propriété 1 démontrée à la section 7.2.2. •

propriété 8: $v^*_{PL}(F,\hat{T}) \leq \hat{T}$

démonstration:

Par la contrainte (42), nous avons $v_{PL}(T) \leq T$. Ceci est vrai pour la solution optimale et pour $\hat{T}$. •

Il faut noter que lorsque l'attente est permise, $\hat{T}$ ne peut plus être utilisé comme borne du problème du voyageur de commerce puisque $\hat{T}$ doit être égal à la durée de la tournée optimale plus le temps total d'attente alors que la fonction objective ne porte que sur la durée de la tournée.

Dans le cas où l'on veut minimiser la durée totale (appelée "makespan") incluant le temps d'attente, $\hat{T}$ constitue une borne et on peut utiliser une technique de dichotomie pour l'obtenir, comme à la section 7.2.2.

7.2.3.3. Résultats numériques.

Nous avons mené des tests sur le problème de minimisation de la durée totale de la tournée (makespan) puisque, pour la Société canadienne des Postes, les coûts des salaires des chauffeurs sont beaucoup plus importants

que le coût du déplacement des véhicules. Le $\hat{T}$ est alors une borne pour cet objectif.

Nous avons utilisé les données du problème de voyageur de commerce de 9 noeuds décrit par Balas et Christofides[1981] et utilisé par Finke et al. [1984] pour tester notre formulation. La matrice des distances est la suivante:

c_{ij}	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	x	2	8	11	15	12	12	11	13
2	8	x	4	12	18	14	12	14	17
3	6	9	x	15	20	17	13	10	17
4	13	15	17	x	5	8	11	15	16
5	10	14	16	3	x	16	12	15	13
6	7	7	11	9	14	x	3	7	8
7	5	7	6	2	4	11	x	2	8
8	4	10	7	9	12	10	13	x	4
9	9	5	9	11	8	2	7	7	x

La tournée optimale est de longueur 42 et passe, dans l'ordre par les sommets 1, 2, 3, 8, 9, 6, 7, 4, 5, 1.

Pour différentes largeurs de fenêtres-horaire, nous avons comparé les bornes fournies par la relaxation linéaire de notre formulation et de celle de Finke et al. avec la borne fournie par le problème d'affectation. En posant $t_{ij} = c_{ij}$, nous avons utilisé une suite de problèmes avec, pour chaque problème, des fenêtres-horaire de plus en plus étroites et imbriquées dans celles du

problème précédent. Pour chaque problème, les fenêtres-horaire sont de même largeur à tous les noeuds. Les fenêtres-horaire étaient centrées sur le temps de passage à chacun des noeuds d'une solution réalisable du problème du voyageur de commerce (la solution 1,2,3,4,5,6,7,8,9,1 de longueur 60). Cette solution demeurait réalisable pour tous les problèmes, même avec les fenêtres-horaire très étroites.

Un préprocesseur élimine pour chaque problème les arcs qui ne peuvent être utilisés à cause des fenêtres-horaire i.e. tous les arcs tels que

$$a_i + t_{ij} > b_j.$$

Ce préprocesseur pourrait aussi pour les problèmes euclidiens s'assurer que les fenêtres-horaire satisfassent les conditions suivantes:

$$b_i = \min\{b_i, T - t_{i1}^{PCCFH}\}$$

$$a_i = \max\{a_i, a_1 + t_{1i}^{PCCFH}\}$$

où t_{ij}^{PCCFH} est la durée du plus court chemin du noeud i au noeud j. Ceci élimine les arcs entrant et sortant du dépôt qui ne peuvent être utilisés dans une solution réalisable.

Pour chaque valeur de T, toute solution du problème du voyageur de commerce doit, pour être réalisable, satisfaire les ensembles de conditions suivantes:

$$t_{1i}^{PCCFH} + t_{i1}^{PCCFH} \leq T \qquad \forall\, i \qquad (43)$$

$$a_i + t_{i1}^{PCCFH} \leq T \qquad \forall i \qquad (44)$$

$$a_i + t_{i1}^{PCC} \leq T \qquad \forall i \qquad (45)$$

Lorsque le problème est euclidien, T doit satisfaire:

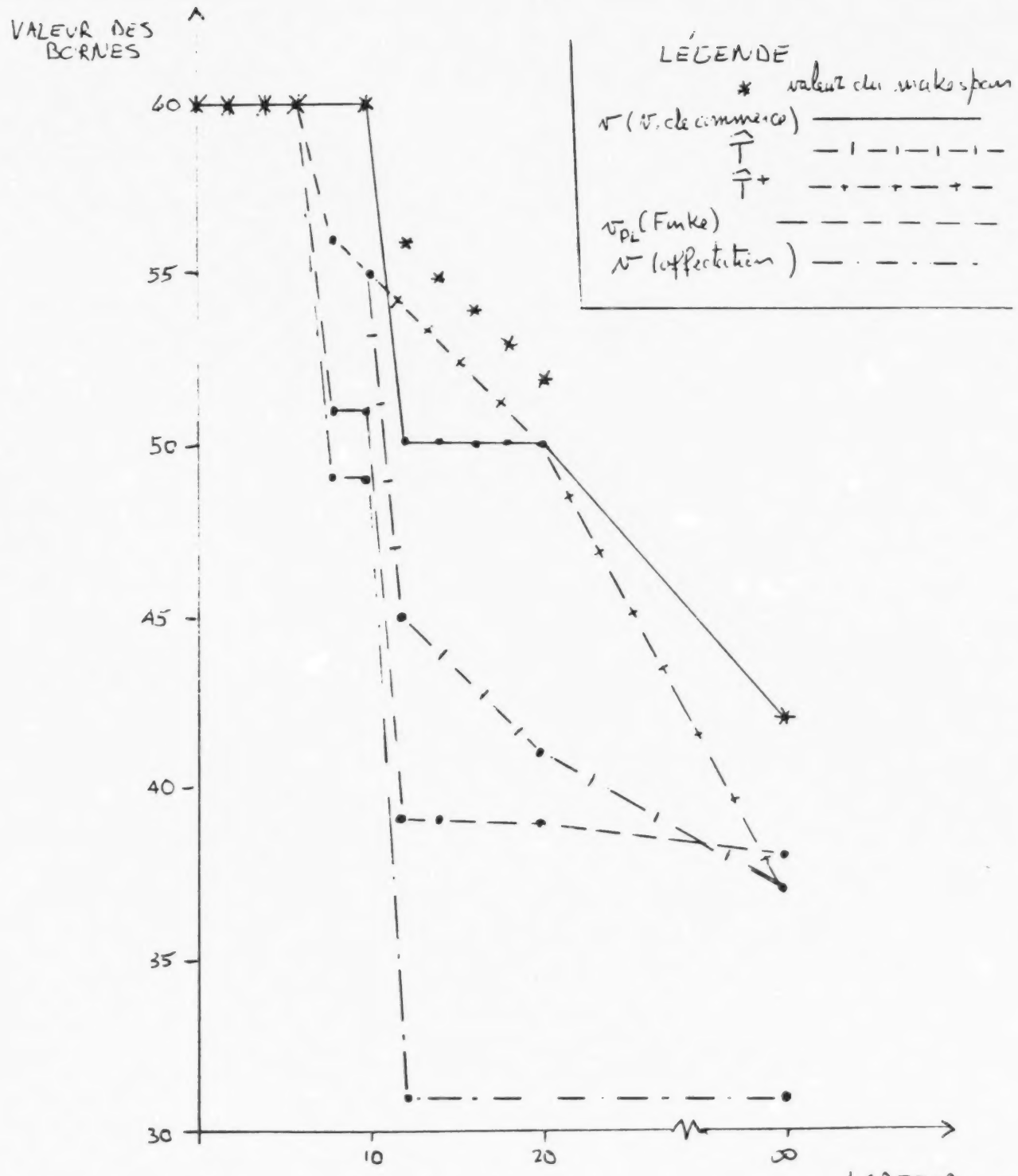
$$a_i + t_{i1} \leq T. \qquad \forall i \qquad (46)$$

Nous avons obtenu des résultats d'abord sans incorporer aucune des conditions précédentes puis en incorporant au modèle les conditions (45) par l'ajout de l'unique contrainte:

$$T \geq \max\{a_i + t_{i1}^{PCC}\} \qquad (47)$$

Les résultats obtenus pour l'ensemble de fenêtres-horaire sont illustrés sur le graphique de la page suivante.

On peut constater que la borne obtenue par notre formulation s'améliore à mesure que les fenêtres-horaire deviennent plus contraignantes.



Note : $\hat{T}$ obtenu sans la condition (47)
$\hat{T}^+$ obtenu avec la condition (47)

7.2.3.4 Le problème des m-voyageurs de commerce avec fenêtres-horaire

Le problème des m-voyageurs de commerce avec fenêtres-horaire se formule de façon similaire à celui du voyageur unique. Les contraintes (38) sont remplacées par les contraintes suivantes:

$$\sum_j (y_{ij} + z_{ij}) = \begin{cases} mT & \text{pour } i = 1 \\ T & \text{pour } i \neq 1 \end{cases} \qquad (38')$$

et on ajoute dans la formulation m dépôts fictifs liés à tous les noeuds par des arcs entrants (au dépôt) et au vrai dépôt par un arc sortant. On place alors une fenêtre-horaire [0, T] sur chacun des dépôts fictifs. Ceci correspond aux contraintes (42) et assure que chaque véhicule a le temps pour effectuer sa tournée.

7.2.4 Conclusion.

Nous avons présenté une nouvelle formulation à 2 flots pour le problème du voyageur de commerce. La demande et l'offre à chaque noeud dépendent de l'arc utilisé et correspondent à la quantité de ressource utilisée sur cet arc.

Nous avons démontré des propriétés intéressantes de cette formulation et lorsque la ressource utilisée est le temps, la formulation permet d'incorporer facilement les contraintes de fenêtres-horaire et sa relaxation linéaire contient alors 4n contraintes. Ces propriétés ont engendré une méthode originale pour obtenir une borne sans avoir à trouver la solution optimale de la relaxation

linéaire, mais plutôt en utilisant le paramètre T qui correspond à la durée maximale de la tournée.

Enfin des tests numériques ont montré que la borne de cette relaxation pour le problème de la durée totale (makespan) s'améliore lorsque les fenêtres-horaire deviennent plus contraignantes.

Chapitre 8

CONCLUSION

La première partie de cette recherche a consisté en une analyse du fonctionnement des services de messagerie et du service de Poste Prioritaire. Cette étude nous a révélé que le prix de revient du transport d'un colis empêchait la Société des Postes d'offrir un service de livraison express. Cependant, un service de cueillette avec livraison le lendemain offre la possibilité d'utiliser un centre de tri, ce qui permet d'augmenter la productivité des véhicules en termes de nombre de colis transportés. Un tel système permet d'attribuer une zone précise à chaque véhicule puis de confectionner la tournée de chacun des véhicules dans sa zone. Le problème est alors décomposé en deux parties: la planification des zones et la confection des itinéraires.

La contribution de cette thèse se situe principalement à deux niveaux: premièrement, nous avons mis au point une méthode analytique de découpage de zones pour le problème de tournées de véhicules avec contraintes de durée et, deuxièmement, nous avons proposé et analysé une formulation originale du problème du voyageur de commerce particulièrement bien adaptée à la modélisation de contraintes d'horaire.

Pour le découpage des zones, nous avons formulé le problème de minimisation des coûts de transport d'une flotte de véhicules en utilisant un systèmes

de zones approximativement rectangulaires et placées en anneaux concentriques autour du dépôt. Nous avons mis au point une méthode qui détermine les dimensions optimales d'une zone en fonction de son éloignement du dépôt et de la densité de la demande dans cette zone. Cette méthode permet, par un processus itératif, de déterminer les zones en partant de la périphérie d'une région vers le centre (où est situé le dépôt).

Nous avons montré comment cette méthode pouvait être adaptée pour tenir compte des contraintes géographiques particulières que l'on retrouve dans les régions urbaines. De plus, nous avons analysé l'impact de la variabilité journalière de la demande sur le design des zones et d'une éventuelle coopération entre les véhicules pour diminuer la variance de la demande.

L'avantage d'utiliser une méthode analytique pour l'étude d'une organisation particulière est que cette méthode ne nécessite pas de moyens informatiques importants, d'une multitude de données ou de développements longs et coûteux. Ceci rend accessible l'étude de plusieurs types d'organisation.

Dans notre étude du problème de la confection de la tournée d'un seul véhicule sur une zone donnée, nous avons classifié les bornes obtenues par la relaxation linéaire d'un certain nombre de formulations du problème du voyageur de commerce. Nous avons démontré l'équivalence de certaines formulations au niveau de la qualité de la borne.

Nous avons ensuite proposé une nouvelle formulation qui se prête bien à la modélisation des contraintes de fenêtres-horaire. D'ailleurs, la relaxation linéaire de cette formulation contient 4n contraintes (si on inclut les contraintes de fenêtres-horaire) et permet donc de résoudre sur micro-ordinateur des problèmes de taille suffisamment grande pour qu'on puisse l'appliquer aux problèmes de Poste Prioritaire.

Enfin, l'analyse de cette formulation nous a permis d'obtenir des résultats intéressants sur le comportement de la borne et nous avons trouvé une méthode efficace pour obtenir une excellente borne au problème du voyageur de commerce. L'obtention d'une bonne borne permet une utilisation efficace d'une méthode d'énumération et évaluation progressive (Branch & Bound) comme méthode exacte.

Les perspectives de recherches et développements futurs, en continuité des travaux de cette thèse, sont nombreuses. Outre le développement d'un système interactif graphique, pour le découpage de zones, dont nous avons esquissé les grandes lignes au chapitre 5, l'application des méthodes analytiques à l'étude de plusieurs types d'organisation nous parait ouvrir un vaste champ de recherche.

D'autre part, des travaux devraient être menés sur l'utilisation de la nouvelle formulation pour résoudre optimalement le problème des voyageurs de commerce multiples. La possibilité de définir des zones de coopération entre véhicules nous semble intéressante.

Enfin, le peu de résultats connus sur les formules d'approximation de longueur de tournées nous incite à poursuivre des recherches dans cette direction.

BIBLIOGRAPHIE

ARMSTRONG, G.R. et GARFINKEL, R.S.(1982): Dynamic Programming Solution of the Single and Multiple Pick-up and Delivery Problem with Application to Dial-a-Ride, Working Paper #162, College of Business Administration, Un. of Tennessee.

BALAS, E. et CHRISTOFIDES, N.(1981): A restricted lagrangian approach to the travelling salesman problem. Math. Progr. 21:19-46.

BODIN, L.D., GOLDEN, B.L., ASSAD, A. et BALL, M.(1983): Routing and Scheduling of Vehicles and Crews, The State of the Art, Computers & Operations Research, 10:69-211.

BODIN, L.D. et SEXTON, T.R.(1986): The Multi-Vehicle Subscriber Dial-a-Ride Problem, TIMS Studies Mgmt. Sci. 22:73-86.

BURNS, L.D., HALL, R.W., BLUMENFELD, D.E. et DAGANZO, C.F.(1985) Distribution strategies that minimize transportation and inventory costs. Opns. Res. 33:469-490.

CHRISTOFIDES, N., MINGOZZI, A. et TOTH, P.(1981): Space State Relaxation Procedure for the Computation of Bounds to Routing Problems, Networks 11:145-164.

CLAUS, A.(1984): A new formulation for the travelling salesman problem, SIAM J. Alg. Disc. Meth., 5:21-25.

DAGANZO, C.F.(1978) An approximate analytic model of many-to-many demand responsive transportation systems. Trans. Res. 12:325-333.

DAGANZO, C.F.(1978): The length of tours in zones of different shapes. Trans. Res. 18B(2):135-145.

DAGANZO, C.F.(1984b) Checkpoint dial-a-ride systems. Trans. Res. 18B(4/5):315-327.

DAGANZO, C.F.(1984c) The distance traveled to visit N points with a maximum of C stops per vehicle: an analytic model and an application. Trans. Sci. 18(4):331-350.

DAGANZO, C.F.(1985a) Supplying a single location from heterogeneous ources. Trans. Res. 19B:409-419.

DAGANZO, C.F.(1985b) Modeling distribution problems with time windows. Report UCB-ITS-RR-85-4, Institute of Transportation Studies, University of California, Berkeley.

DAGANZO, C.F.(1985c) Modeling distribution problems with time windows Part II: two customer types. Report UCB-ITS-RR-85-5, Institute of Transportation Studies, University of California, Berkeley.

DAGANZO, C.F. et NEWELL, G.F.(1986) Configuration of physical distribution networks. Networks 16: 113-132.

DANTZIG, G.B., FULKERSON, D.R. et JOHNSON, S.M.(1954): Solutions of large scale travelling salesman problem, Operations Research, 2:393-410.

DASKIN, M.S.(1985): Logistics: an Overview of the State of the Art and Perspectives on Future Research, Trans. Res.-A 19A:383-398.

DESROCHERS, M.(1986): Un algorithme pour le problème du plus court chemin avec contraintes supplémentaires, Publication 421, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, 32 pp.

DESROCHERS, M., LENSTRA, J.K., SAVELSBERGH, M.W.P. et SOUMIS, F. (1988): Vehicle routing with time windows: optimization and approximation, in Vehicle Routing: Method and Studies, ed. Golden et Assad, North-Holland.

DESROCHERS, M. et SOUMIS, F.(1988a): A generalized permanent labelling algorithm for the shortest path problem with time windows, Infor 26:193-214.

DESROCHERS, M. et SOUMIS, F.(1988b): A reoptimization algorithm for the shortest path problem with time windows, Eur. J. Opns. Res. à paraitre.

DESROSIERS, J., DUMAS, Y. et SOUMIS, F.(1986a): A Dynamic Programming Method for the Large Single Vehicle Dial-a-Ride Problem with Time Windows, Publication 361, Am. J. Math. Mgmt. Sci. 6:301:325.

DESROSIERS, J., DUMAS, Y. et SOUMIS, F.(1986b): The Multiple Many to Many Routing Problem with Time Windows, Cahiers du GERAD, G-84-13, Ecole des Hautes Etudes Commerciales de Montréal, 24 pp.

DESROSIERS, J., PELLETIER, P. et SOUMIS, F.(1983): Plus court chemin avec contraintes d'horaires, RAIRO, 17:357-377.

DESROSIERS, J., SOUMIS, F. et DESROCHERS, M.(1984): Routing with time windows by column generation, Networks, 14:545-565.

DESROSIERS, J., SOUMIS, F. et SAUVE, M.(1988): Lagrangian relaxation methods for solving the minimum fleet size multiple traveling salesman problem, Mgmt. Sci. à paraitre.

DUMAS Y.(1985): Confection de routes de véhicules pour le transport de plusieurs origines à plusieurs destinations, Mémoire de M.Sc., département d'I.R.O., Publication 434, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, 97 pp.

FINKE, G., CLAUS, A. et GUNN, E.(1984): A two-commodity network flow approach to the traveling salesman problem, Congressus Numerantium, 41:167-178.

FINKE, G. et KUSIAK, A..(1985): Network approach to modelling of flexible manufacturing modules and cells, R.A.I.R.O. APII, 19:359-370.

GAVISH, B. et GRAVES, S.C.(1978): The travelling salesman problem and related problems, Working paper GR-078-78,Operations Reseach Center, Massachusetts Institute of Technology.

GAVISH, B. et SRIKANTH, K.(1986): An optimal solution method for large-scale multiple traveling salesman problems, Oper. Res. 34:698-717

GOLDEN, B.L. et BAKER,E.K.(1985): Future Directions in Logistics Research, Trans. Res.-A 19A:405-409.

HAINES,G.H. et WOLFF, R.N.(1982): Alternative Approaches to Demand Responsive Scheduling Algorithms, Trans. Res.-A 16A:43-54.

HAN A.F.(1984) One-to-many distribution of non-storable items: approximate analytic models. Ph.D. Thesis, Dept. of Civil Eng., U. of C., Berkeley.

HELD, M. et KARP, R.M.(1971): The travelling salesman problem and minimum spanning trees: II, Math. Prog., 1:6-25.

JAW, J., ODONI, A., PSARAFTIS, H. et WILSON, N.(1986): A Heuristic Algorithm for the Multi-Vehicle Many-to-Many Advanced-Request Dial-a-Ride Problem, Trans. Re. 20B:243-257.

LANGEVIN, A.(1986) Le problème de confection dynamique des tournées d'une flotte de véhicules Ecole polytechnique de Montréal.

LANDRY, P.E.(1986):Systèmes d'optimisation en transport postal intra-urbain, Publication 445, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, 26 pp.

LAPORTE, G. et NOBERT, Y.(1987) Exact algorithms for the vehicle routing problem in Surveys in Combinatorial Optimization, S. Martello et al. eds, North-Holland Publ., Amsterdam

LAPORTE, G., NOBERT, Y. et DESROCHERS, M.(1985): Optimal Routing under Capacity and Distance Restrictions, Operations Research 33:1050-1073

LARSON, R.C. et ODONI, A.R.(1981) Urban Operations Research. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

LAWLER, LENSTRA, RINNOOY KAN et SHMOYS,(1985): The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization, J. Wiley, New-York.

LENSTRA J.L., RINNOOY et KAN A.H.G.(1981):Complexity of Vehicle Routing and Scheduling Problems, Networks 11, 221-227.

LOULOU, R.J. et PASKIEVICI, A.(1988): On multicommodity flow formulation for the TSP, Working paper, McGill University.

LUCENA, A.(1986): Exact solution approaches for the vehicle routing problem, Ph.D. thesis, Imperial College of Science and Technology, University of London. England, 205 p.

MAGNANTI, T.L.(1981): Combinatorial Optimization and Vehicle Fleet Planning: Perspectives and Prospects, Networks 11:179-214.

MILLER, C.E., TUCKER, A.W., et ZEMLIN, R.,A.(1960): Integer programming formulation of travelling salesman problems, J. ACM, 7:326-329.

NEWELL, G.F. et DAGANZO, C.F.(1986a) Design of multiple-vehicle delivery tours - I : a ring radial network. Trans. Res. 20B:345-363.

NEWELL, G.F. et DAGANZO, C.F.(1986b) Design of multiple-vehicle delivery tours - II : other metrics. Trans. Res. 20B:365-376.

NEWELL, G.F. et DAGANZO, C.F.(1986c) Design of multiple-vehicle delivery tours - III : valuable goods. Trans. Res. 20B:377-390.

PSARAFTIS H.N.(1980): A Dynamic Programming Solution to the Single Vehicle Many-to-Many Immediate Request Dial-a-Ride Problem, Trans. Sci. 14(2):130-154.

PSARAFTIS H.N.(1983): An Exact Algorithm for the Single Vehicle Many-to-Many Dial-a-Ride Problem with Time Window, Trans. Sci. 17(2):351-257.

ROY S., ROUSSEAU J.-M., LAPALME G. et FERLAND J(1985a).: Elaboration des routes et horaires de véhicules pour le transport adapté: l'algorithme, Publication 412, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, 21 pp.

ROY S., ROUSSEAU J.-M., LAPALME G. et FERLAND J.(1985b): Elaboration des routes et horaires de véhicules pour le transport adapté: les problèmes tests et l'évaluation des résultats, Publication 414, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, 53 pp.

SEXTON, T.R. et BODIN, L.D.(1985a): Optimizing Single Vehicle Many-to-Many Operations with Desired Delivery Times: I. Scheduling, Trans. Sci. 19(4):378-410.

SEXTON, T.R. et BODIN, L.D.(1985b): Optimizing Single Vehicle Many-to-Many Operations with Desired Delivery Times: II. Routing, Trans. Sci. 19(4):411-435.

SOLOMON, M. et DESROSIERS, J.(1988): Time window constrained routing and scheduling problems: a survey, Trans. Sc. 22:1-13.

STEIN, D.(1978). Scheduling dial-a-ride transportation systems. Trans. Sci. 12:232-249

WILSON, N. et MILLER, E.(1977): Advanced Dial-a-Ride Algorithms Research Project, Phase II. Interim Report, Report R77-31, MIT, Cambridge, Mass.

WONG, R.T.(1980): Integer programming formulations of the travelling salesman problem, Proceedings of the IEEE International Conference of Circuits and Computers, 149-152